

LINGUAGGI E SISTEMI FORMALI – A.A. 2009-2010

APPUNTI DI LOGICA

I. TERMINI DI UN LINGUAGGIO FORMALE

SOMMARIO

<i>Nomi</i>	1
<i>Predicati</i>	3
<i>Proposizioni</i>	4
<i>Simboli impropri</i>	6
<i>Formule ben formate</i>	8
<i>Argomentazioni formali</i>	8

Nei linguaggi formali, tutte le argomentazioni sono espresse mediante simboli. Prima di impegnarci sul numero dei simboli necessari e sulla loro tipologia, conviene soffermarci a riflettere sui *termini* che compaiono nelle espressioni di tipo dichiarativo (delle quali noi vogliamo occuparci occuparci in questa sede).

Nomi

Prima di chiarire cosa sia in logica un *nome*, è bene premettere che in questo paragrafo ci occuperemo soltanto dei *nomi propri*, cioè di quei termini che servono a denotare (identificare) oggetti, enti o individui *specifici*; per esempio, sono nomi (nella nostra accezione): “Fido”, “la madre di Caino”, “la radice quadrata di 9”, eccetera. I nomi *comuni* (o di *genere naturale*), come “cane”, “madre”, “numero pari”, eccetera, saranno invece considerati più avanti; li tratteremo come termini che denotano enti *generici*, caratterizzati dall'*appartenenza a una certa classe*, identificata mediante proprietà o relazioni. Per esempio, i nomi comuni “cane”, “madre”, “numero pari”, ai quali abbiamo ora accennato, saranno per noi: “animale appartenente alla specie dei cani”, “individuo che ha partorito un altro individuo”, “numero naturale multiplo di 2”. Avremo occasione di tornare più avanti sui nomi comuni, quando parleremo di *variabili*, di *forme*, di *proprietà* e – soprattutto – di *forme proposizionali*.

Abbiamo detto che nel linguaggio ordinario sono *nomi*, nella nostra accezione, termini come:

- a) “Carlo”, “Napoli”, “Stromboli”, “dieci”;
- b) “la capitale della Germania”, “il quadrato di 7”, “l'autore dei Promessi Sposi”.

Possiamo anche osservare che nella riga a) abbiamo scritto *simboli convenzionali*, i quali denotano in forma sintetica il denotato; nella riga b) abbiamo scritto invece *simboli che hanno una certa struttura*, la quale è tra l'altro espressiva del *modo* in cui il simbolo denota il denotato (avremmo potuto dire “Berlino”, “quarantanove”, “Alessandro Manzoni”, in luogo delle espressioni che abbiamo adottato).

Il fatto che un oggetto, nel linguaggio ordinario, possa essere denotato in vari modi (cioè il fatto che ci si possa riferire per esempio a una stessa persona, denotandola per esempio come “il professore di Linguaggi e sistemi formali”, “Giovanni Iorio Giannoli”, “il docente dello studio 31”, “il figlio di Caio e Sempronia”, “l’inquilino dell’ultimo piano”, eccetera) è fonte di numerosi problemi, nell’ambito della filosofia del linguaggio. La teoria più diffusa e accreditata è ancora oggi quella di Gottlob Frege (*Über Sinn und Bedeutung*, 1892) secondo la quale:

- i nomi *sono nomi* di qualcosa (“denotano” o “nominano” qualcosa); ciò che il nome denota (il denotato) è la *denotazione* del nome;
- i nomi denotano *in un certo modo*, cioè *connotano*, perché essi esprimono *certi aspetti particolari* della loro denotazione; dunque, un nome *esprime* una *connotazione* (un senso) di ciò che esso denota.

Per esempio, i nomi “Alessandro Manzoni” e “l’autore dei Promessi sposi” denotano lo stesso individuo, ma lo fanno in due modi *diversi*; il secondo nome rende esplicita infatti una proprietà del denotato (il fatto di avere scritto il romanzo “I promessi sposi”), mentre nel primo nome questa stessa proprietà non è affatto esplicitata.

Nel linguaggio ordinario, due nomi diversi dello stesso individuo (esprimenti diverse connotazioni) *non* sono tra loro intercambiabili. Anche se si tratta a tutti gli effetti di *nomi che si riferiscono al medesimo ente*, due nomi che esprimono connotazioni diverse *non* possono essere considerati sinonimi. Infatti, ogni connotazione veicola un *diverso contenuto informativo* (per esempio, una proprietà particolare dell’ente denotato, scelta per connotarlo); se si sostituisce un nome esprimente quella particolare connotazione con un’altro (che pur si riferisce al medesimo ente), si perde informazione. Per esempio, la frase «Manzoni è l’autore dei Promessi Sposi» veicola un contenuto informativo molto diverso dalla frase «Manzoni è Manzoni», oppure dalla frase «l’autore dei Promessi Sposi è l’autore dei Promessi Sposi»; eppure, le due ultime frasi possono essere ottenute dalla prima, sostituendo il nome “Manzoni” al nome “l’autore dei Promessi Sposi” (o viceversa, posto che questi due nomi denotano lo stesso individuo).

Nell’ambito della filosofia del linguaggio, si usa dire che due *nomi diversi dello stesso ente* (esprimenti diverse connotazioni) *hanno* la stessa *estensione*; inoltre, quando due *nomi connotano un certo ente sotto due diversi profili*, si dice che essi *esprimono* due diverse *intensioni*. In generale, quando ci si riferisce a un certo ente secondo una certa intensione, non si mira soltanto ad identificarlo (ad attribuirgli una certa etichetta, a nominarlo); piuttosto, nominando quell’ente, si sta esprimendo anche un particolare *concetto* (per esempio: il concetto che quell’individuo, oltre a essere un uomo, è anche l’autore di una certa opera letteraria). È proprio sotto questo profilo che la connotazione, l’intensione, il concetto, forniscono il *senso* di una certa espressione. Il nome, quando ha il ruolo di una vera e propria “etichetta”, si limita invece a delimitare una certa *estensione*, a distinguere sotto il profilo linguistico la propria denotazione, a denotare l’*ente*, l’*oggetto* o l’*individuo* cui esso si riferisce.

Nel quadro di una concezione del genere, Frege arrivò a stabilire i seguenti principi (validi per i nomi composti, che contengono altri nomi come loro parti costituenti):

- i) quando – entro un nome composto – un nome costituente è rimpiazzato da un nome che esprime la *stessa connotazione*, la connotazione espressa dal nome composto non muta;
- ii) quando – entro un nome composto – un nome costituente è rimpiazzato da un nome che ha la *stessa denotazione*, la denotazione del nome composto non muta.

Avremo modo di utilizzare il secondo di questi due principi, quando ci porremo il problema di ciò che denotano in logica gli enunciati.

Per i linguaggi formali di cui noi ci occuperemo, converremo esplicitamente (salvo esplicito avviso contrario) che *ognuno degli oggetti di cui stiamo parlando abbia un nome diverso* e che *a nessuno degli oggetti di cui stiamo parlando possa essere attribuito più di un nome*; in altri termini, le logiche di cui noi ci occuperemo saranno logiche di tipo *estensionale*: ogni oggetto risulterà denotato da un diverso nome e ogni diverso nome denoterà qualcosa di diverso; perciò, non si darà mai il caso che un nome possa anche *connotare* qualcosa, cioè denotarlo sotto un certo profilo. Se un certo ente dovesse godere di certe proprietà particolari (le quali potrebbero servire a connotarlo), queste dovranno essere espresse nella forma di una esplicita predicazione (del tipo: «si dà un certo individuo e quell’individuo è Manzoni e quell’individuo è l’autore dei Promessi Sposi»); non sarà consentito che le proprietà siano espresse come connotazioni, all’interno del nome.

Nei linguaggi di cui tratteremo, un nome potrà denotare un ente, un oggetto, un individuo, ma potrà essere anche il nome di un *fatto* (di un evento). Giacché l'espressione linguistica di un fatto è in genere un *enunciato*, i simboli che noi utilizzeremo come nomi potranno nominare (a seconda dei casi), sia gli enti individuali che gli enunciati. Per esempio, il simbolo "p" potrebbe essere utilizzato per nominare (a seconda dei casi) un certo individuo di nome "Pasquale", oppure l'evento espresso dall'enunciato «si dà il caso che piova».

È inoltre opportuno tracciare una distinzione preliminare tra *costanti* e *variabili*:

- sono *costanti* i nomi propri (i simboli) che – nel corso dell'argomentazione – denotano sempre il *medesimo* ente, nell'ambito di un certo dominio;
- sono *variabili* i nomi propri (i simboli) che – nel corso dell'argomentazione – denotano un ente *generico*, la cui identità non è precisata; se il dominio di una variabile è una *classe* (per esempio la classe dei cani), si può anche pensare che la variabile corrisponda a un *nome di genere* (il genere degli appartenenti a quel dominio). Tuttavia (a meno che il dominio su cui spazia la variabile non risulti evidente, nel contesto dell'argomentazione), è preferibile pensare che una variabile indichi sempre un *ente generico* e che la classe di appartenenza sia esplicitata mediante una specifica predicazione. Sul punto, avremo occasione di tornare nel paragrafo successivo.

In linea di massima, per tutti i nomi noi utilizzeremo le lettere minuscole dell'alfabeto latino (a, b, c, ..., p, q, r); tuttavia, ci riserveremo di utilizzare le lettere t, x, y, z per segnalare che il nome in questione è una variabile.

Quando, in una certa espressione complessa, una costante viene rimpiazzata da una variabile, si ottiene quella che i logici chiamano una *forma*: invece di riferirsi all'oggetto specifico denotato dalla costante, la *forma* si riferisce a un oggetto generico, appartenente a un dominio. Per esempio, se nell'espressione «Aldo è romano» la costante "Aldo" viene rimpiazzata con la variabile "x", allora la forma "x è romano" si riferisce a un individuo generico, appartenente al dominio degli esseri umani di sesso maschile. In questo senso, un *nome di genere* (come "cane", "madre", "romano") può essere considerata una forma.

Predicati

Nel linguaggio ordinario, "predicare" qualcosa – a proposito di un dato oggetto – significa assegnare a quell'oggetto un certo attributo; potremmo anche dire (in maniera un po' grossolana) che *predicare* qualcosa equivale ad *assegnare certi individui a certe classi*. Per esempio, affermare che «Albert è luterano» equivale ad assegnare l'individuo "Albert" alla classe dei "luterani". Dunque, dal punto di vista formale, una predicazione potrebbe essere espressa come una relazione di appartenenza una classe; per esempio, se il simbolo "a" è il nome dell'individuo di cui stiamo parlando ed il simbolo "L" indica la classe dei luterani, la predicazione «Albert è luterano» potrebbe essere espressa con la formula « $a \in L$ » (dove " $\in$ " è il simbolo che esprime l'appartenenza). Noi utilizzeremo tuttavia la convenzione universalmente adottata, secondo la quale ogni predicazione va formulata antepoendo al nome il predicato; nel nostro esempio, scriveremo dunque «La», volendo intendere che l'individuo di nome "a" gode della proprietà "L". In linea di massima, per tutti i predicati noi utilizzeremo le lettere maiuscole dell'alfabeto latino.

Mentre la formula «La» è un vero e proprio enunciato (perché è il nome proprio del fatto che Albert è luterano), quando si predica su una variabile si ottiene soltanto una *forma predicativa*: per esempio, l'espressione «Lx» non assegna il predicato "L" a un individuo particolare, ma lo assegna piuttosto a un generico individuo "x", non ulteriormente specificato. In un certo senso, un nome comune (o nome di genere naturale) è un simbolo di questo tipo, in quanto denota tutti gli individui appartenenti a una classe.

Tuttavia, per utilizzare proficuamente un'espressione del genere (ossia: per poterla considerare come il nome di qualche cosa), noi dovremmo specificare a quale oggetto o individuo essa si riferisca; in altre parole, dovremmo mettere al posto della variabile una costante. In alternativa, potremmo anche ammettere che è consentito predicare su una variabile, a patto di aggiungere qualche ulteriore specificazione: per esempio, potremmo aggiungere che quella predicazione vale *per tutti* gli individui appartenenti ad un certo dominio; oppure, che la predicazione vale per *almeno uno* di quegli individui. In termini tecnici, si dice che la variabile di una predicazione va sempre *vincolata*, specificando in modo esplicito gli individui per i quali si vuol far valere la predicazione. Come vedremo più avanti, per vincolare la variabile di una predicazione è possibile far uso di simboli idonei.

Proposizioni

L'unità elementare di espressione – nel linguaggio ordinario – è l'*enunciato* (un aggregato minimo di parole, che ha un senso compiuto). Quando un enunciato *asserisce* qualcosa, si dice che esso è *dichiarativo*.

Come abbiamo già avuto occasione di notare, un enunciato dichiarativo è l'*espressione linguistica* di un fatto; possiamo dunque concepire questi enunciati come *nomi* di fatti.

Abbiamo già notato che – nel linguaggio ordinario – un nome *denota* qualcosa, *connotandolo* in una certa maniera. Visto che la logica formale fa programmaticamente *astrazione* dal *contenuto* delle espressioni, si tratta di discutere cosa possa mai denotare un enunciato, quando si fa astrazione dal fatto specifico di cui l'enunciato è un nome.

Per cercare di capire cosa mai denoti in logica un enunciato, richiamiamo innanzi tutto il secondo dei principi stabiliti da Frege a proposito dei nomi (si veda il riquadro al primo paragrafo di questo file): secondo Frege, ciò che un nome denota (la denotazione del nome) non deve cambiare se – entro il nome – una componente del nome viene rimpiazzata con un nome che abbia la stessa denotazione (cioè: con un nome che denoti lo stesso ente).

Consideriamo allora i due enunciati:

- (1) «Dante Alighieri è l'autore della Divina Commedia»
- (2) «le virtù teologali sono tre»

I due enunciati descrivono fatti diversi. Nel linguaggio ordinario, ciò che essi denotano non dovrebbe avere nulla in comune. Applichiamo però il principio di Frege all'enunciato (1) e trasformiamolo in:

- (1') «Dante Alighieri è l'individuo che scrisse i tre canti della Divina Commedia».

Giacché abbiamo soltanto rimpiazzato il termine “autore” con un termine che denota la stessa cosa (e ci siamo limitati a specificare un po' meglio come è strutturata una certa opera letteraria), la denotazione dell'enunciato (1') non dovrebbe differire dalla denotazione dell'enunciato (1); in altri termini, alla luce del principio di Frege, i due enunciati (1) e (1') dovrebbero denotare la stessa cosa.

Ora, il fatto che Dante Alighieri abbia scritto i tre canti della Divina Commedia si può esprimere anche così:

- (1'') «Il numero dei canti, pari a quelli scritti da Dante Alighieri nella Divina Commedia, è uguale a tre».

Se dal punto di vista della connotazione la (1'') differisce parecchio dalla (1), noi dobbiamo insistere sul fatto che *non* ci stiamo occupando in questa sede del *senso* delle espressioni (cioè: del loro *modo* di denotare, ossia dei concetti che esse veicolano); piuttosto, noi ci stiamo occupando di *ciò che rimane invariante*, quando cambia la *forma* della denotazione.

Possiamo allora osservare che nella (1'') l'espressione “il numero dei canti pari a quelli scritti da Dante Alighieri nella Divina Commedia” non svolge altra funzione se non quella di nominare il numero tre. Se allora – sempre alla luce del principio di Frege – noi rimpiazziamo questo nome con un nome perfettamente equivalente (cioè con il nome delle “virtù teologali”), otteniamo:

- (1''') «Il numero delle virtù teologali è tre»,

enunciato che è perfettamente equivalente, sotto il profilo della denotazione, all'enunciato (2).

Abbiamo dunque mostrato che, sotto il profilo della denotazione (se si accetta l'impostazione di Frege), gli enunciati (1) e (2) sono del tutto equivalenti; essi dovrebbero quindi denotare *qualcosa di condiviso*, malgrado essi descrivano fatti del tutto scollegati.

Ora, l'unica cosa che i due enunciati in questione potrebbero condividere è il fatto che essi – per così dire – *descrivono come stanno le cose*: infatti, si dà il caso che Dante Alighieri fosse l'autore della Divina Commedia e si dà il caso che (secondo la dottrina cattolica) il numero delle virtù teologali sia pari a tre.

Se accettiamo la tesi (già avanzata nella metafisica aristotelica) secondo la quale «è vero dire che l'essere è e che il non-essere non è» (Aristotele, *Metaphysica* Γ, 1011b 27 – sottolineature mie) ovvero secondo la quale «un enunciato vero è un enunciato il quale dice che le cose stanno così e così, e le cose stanno effettivamente così e così» (A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, 1935 – sottolineature mie), allora possiamo concludere che ciò che i nostri due enunciati hanno in comune è il fatto di essere veri.

Insomma, se si rimpiazza un nome con un altro nome, il quale denoti la stessa cosa, l'unico elemento che resta invariante non è il significato concettuale, bensì il *valore di verità*. Da considerazioni di questo tipo Frege trasse la conclusione che – dal punto della logica – *ciò che gli enunciati denotano è il loro valore di verità*.

Seguendo l'impostazione di Frege, noi postuleremo due valori di verità (il “vero” e il “falso”) e diremo che la denotazione degli enunciati (in un linguaggio formale) può assumere soltanto l'uno o l'altro di questi valori.

Si badi bene: i valori di verità sono *oggetti astratti*, che non possono essere identificati con la verità e con la falsità ordinaria. Infatti, mentre noi siamo in genere in grado di dare giudizi sulla verità di certe affermazioni (controllando – ove questo sia possibile – se le cose stanno in un certo modo), nell'ambito dei linguaggi formali *non è previsto alcun appello a considerazioni di carattere extra-logico* (come sarebbero – per esempio – quelle che potrebbero discendere da controlli sperimentali). Per questo, anche se nel nostro lavoro noi incontreremo enunciati ai quali la logica può far corrispondere con sicurezza un valore di verità, nel caso di enunciati che descrivono eventi della vita ordinaria la logica non può che sospendere il giudizio, evitando di trarre conclusioni che non le competono.

Dobbiamo poi accennare a una ulteriore sottigliezza.

Secondo una tradizione che risale alla logica post-scolastica, sarebbe opportuno distinguere tra *enunciati* e *proposizioni*.

Senza approfondire le cose, basta qui dire che dal punto di vista della filosofia del linguaggio un enunciato è la mera *espressione simbolica* di un fatto, mentre una proposizione potrebbe essere concepita come il *significato* (il contenuto concettuale) di un enunciato. Giacché in un linguaggio formale – per quanto s'è detto – l'unica cosa che gli enunciati denotano è il loro *valore di verità*, se noi volessimo mantenere una distinzione formale tra *enunciati* e *proposizioni* potremmo ammettere che *la proposizione è il contenuto concettuale di ciò che l'enunciato asserisce*; potremmo inoltre aggiungere che *è proprio il contenuto concettuale ciò che ha un certo valore di verità*.

Poste così le cose, mentre continueremo a dire che gli enunciati *denotano* il loro valore di verità, saremo anche autorizzati ad asserire che le proposizioni *hanno* un valore di verità. Una mossa del genere ci consentirà di semplificare l'esposizione:

- invece di dire – per esempio – che un certo *enunciato* “p” *denota* il valore di verità “falso”, potremo dire più semplicemente che la *proposizione* corrispondente *ha* il valore di verità “falso” (oppure, ancora più semplicemente, potremo dire che «la proposizione p è falsa»);
- invece di pensare alle *variabili* come a nomi che *denotano* (a seconda dei casi) un valore di verità “vero” o “falso”, chiameremo *variabile proposizionale* ogni variabile che sia in grado di assumere (a seconda dei casi) un valore di verità “vero” o “falso”;
- invece di pensare alle *forme* come a termini che possono essere trasformati in enunciati (quando le variabili siano rimpiazzate da costanti) e che dunque, come enunciati, potrebbero *denotare* valori di verità, chiameremo *forme proposizionali* tutte quelle forme i cui valori *siano* valori di verità.

In questo modo, invece di parlare di simboli che *denotano* valori di verità, potremo parlare più semplicemente di *proposizioni*, di *variabili proposizionali* o di *forme proposizionali* che *hanno* (o possono assumere) certi valori di verità.

Simboli propri e impropri

Come abbiamo osservato, i nomi denotano sempre qualcosa; infatti:

- sia che essi vengano utilizzati per argomentare su un certo oggetto,
- sia che essi servano per nominare una certa variabile (entro un certo dominio),
- sia che essi costituiscano l'espressione linguistica di un certo evento,

i nomi si riferiscono sempre a qualcosa.

Si può anche osservare che ciò che un nome denota è in genere qualcosa che appartiene a una certa *categoria* di enti (cioè di cose, di individui, oppure di eventi). Potremmo anche dire che ad ogni nome può essere in linea di massima attribuito un *significato concettuale*, o un *riferimento* oggettivo, legato a ciò che il nome denota (cioè legato, nei termini di Frege, alla *denotazione* del nome). Insomma: i nomi denotano qualcosa, anche quando essi vengono presi isolatamente, estrapolandoli da una frase. Proprio per questo, i logici usano dire che i nomi sono *simboli propri*. Si potrebbe anche dire (riprendendo un'antica classificazione) che i nomi sono *termini categorematici*, perché denotano sempre qualcosa che appartiene a una certa *categoria*.

Oltre ai simboli propri, esistono in ogni linguaggio alcuni termini i quali – *presi isolatamente* – non denotano nulla (e non hanno dunque alcun significato). Tuttavia, alcuni di questi simboli possono combinarsi con i simboli propri, per formare espressioni più lunghe, che sono in grado di denotare qualcosa (e che dunque, in questa accezione, hanno un significato). Per esempio, sono termini di questo tipo (nel linguaggio ordinario) la congiunzione “e”, la negazione “non”, la congiunzione condizionale “se”. Infatti, mentre il termine “e” non denota alcunché, una espressione composta da due enunciati dichiarativi e dal termine “e” (per esempio: «si dà il caso che piova e si dà il caso che sia sera») è dotata di significato (e veicola un'informazione aggiuntiva, rispetto all'informazione veicolata dai due enunciati congiunti, presi separatamente). Per questa loro caratteristica (di non denotare alcunché, ma di rendere possibili altre denotazioni) i termini di questo tipo vengono chiamati in logica *simboli impropri*, o *termini sincategorematici*.

Nei linguaggi formali che studieremo, avremo modo di incontrare due gruppi di simboli che hanno questa caratteristica: i *connettivi logici* e i *quantificatori*:

- i *connettivi logici* sono simboli impropri che, applicati alle costanti del linguaggio, danno luogo ad altre costanti;
- i *quantificatori* sono simboli impropri che devono essere applicati unicamente a *variabili*; inoltre, quando un quantificatore (dopo essere stato applicato a una variabile) viene combinato con una forma proposizionale che contiene quella variabile, esso dà luogo a una proposizione.

Vedremo tra poco quale sia l'uso dei quantificatori.

Nella **Tabella 1**, diamo l'elenco dei *connettivi* che utilizzeremo, nel corso del nostro studio. Possiamo anticipare che *soltanto alcuni di essi sono indispensabili* per la costruzione dei linguaggi dei quali noi ci occuperemo. Alcuni connettivi sono infatti esprimibili come combinazione di altri; ma il fatto di utilizzarne un numero superiore – rispetto al numero strettamente necessario – ci consentirà di rendere più semplice il formalismo. Utilizzeremo i primi cinque connettivi in tutti i linguaggi formali che avremo modo di incontrare nel nostro studio; i due connettivi di necessità e di possibilità saranno utilizzati nel linguaggio modale; i quattro connettivi che specificano il tempo dell'occorrenza di un fatto (rispetto al tempo dell'enunciazione), saranno utilizzati nella logica temporale di base; i due connettivi diadici di sincronicità e successione temporale saranno utilizzati in una estensione della logica temporale di base, nella quale sarà possibile descrivere gli ordinamenti temporali.

Tabella 1

connettivo	simbolo	applicazione	lettura della formula
negazione	$\sim$	$\sim p$	<i>non</i> si dà il caso che p
coniunzione	$\wedge$	$p \wedge q$	si dà il caso che p <i>e</i> si dà il caso che q
disgiunzione	$\vee$	$p \vee q$	si dà il caso che p <i>oppure</i> si dà il caso che q
implicazione	$\supset$	$p \supset q$	se si dà il caso che p, <i>allora</i> si dà il caso che q
bicondizionale	$\equiv$	$p \equiv q$	si dà il caso che p <i>se e solo se</i> si dà il caso che q
necessità	$\Box$	$\Box p$	<i>è necessario che</i> p
possibilità	$\Diamond$	$\Diamond p$	<i>è possibile che</i> p
passato debole	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}p$	<i>si è dato talvolta</i> il caso che p
futuro debole	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}p$	<i>si darà talvolta</i> il caso che p
passato forte	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}p$	<i>si è dato sempre</i> il caso che p
futuro forte	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}p$	<i>si darà sempre</i> il caso che p
sincronicità	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_{t_0}p$	<i>all'istante</i> t_0 <i>si dà</i> il caso che p
successione	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}_{t_1 t_2}$	<i>l'istante</i> t_2 <i>è successivo a</i> t_1

Il ruolo dei primi cinque connettivi – nella costruzione di un sistema formale – è molto simile a quello svolto dalle corrispondenti congiunzioni, nel linguaggio ordinario. Qualche avvertenza va fatta soltanto circa a proposito della disgiunzione e dell'implicazione.

Per quanto riguarda la *disgiunzione*, va segnalato il fatto che nel linguaggio ordinario la congiunzione “o” può essere utilizzata in due modi distinti: può indicare un'*alternativa* secca tra un certo evento p e un certo evento q (sicché non si dà mai il caso che entrambi i due eventi occorrono insieme), ma può indicare anche l'occorrenza di p, oppure quella di q, oppure quella di entrambi, *senza escludere* quest'ultimo caso. È in questa seconda accezione (la quale *non* esclude l'occorrenza di entrambi i disgiunti) che i logici utilizzano la disgiunzione.

Quanto all'*implicazione*, si deve notare che l'espressione $(p \supset q)$ asserisce soltanto questo: che l'occorrenza di p *implica* l'occorrenza di q. L'espressione $(p \supset q)$ *non esclude* il caso che p *non* si dia (e che, nella stessa circostanza, q si dia, oppure non si dia). Insomma, tra le possibili combinazioni dell'*antecedente* (p) e del *conseguente* (q), l'implicazione esclude soltanto il caso in cui l'antecedente si dia e il conseguente *non* si dia.

Tenuto conto di queste avvertenze, l'uso dei connettivi nei linguaggi formali non si discosta da quello ordinario.

Nella **Tabella 2**, diamo invece l'elenco dei quantificatori che utilizzeremo, quando affronteremo il cosiddetto “calcolo dei predicati”. Come si può notare dagli esempi forniti, i quantificatori consentono di *vincolare* le variabili, trasformando le forme predicative in proposizioni. Pertanto, i quantificatori svolgono proprio quel ruolo al quale accennavamo nell'ultimo capoverso del paragrafo dedicato ai predicati: la loro applicazione è in grado di trasformare una forma predicativa in una costante.

Tabella 2

quantificatore	simbolo	applicazione	lettura della formula
Esistenziale	$\exists$	$\exists x Fx$	<i>esiste almeno</i> un x che gode della proprietà F
Universale	$\forall$	$\forall x Fx$	<i>tutti</i> gli x godono della proprietà F

Formule ben formate

Abbiamo presentato nei precedenti paragrafi la maggior parte dei simboli che dovremo utilizzare, per costruire linguaggi formali.

Dobbiamo ancora aggiungere le *parentesi* e qualche *segno d'interpunzione*, che ci serviranno per scrivere in modo più chiaro le nostre espressioni. Più avanti, sarà utile introdurre qualche simbolo ulteriore, che ci consenta di esprimere in maniera sintetica il fatto che una conclusione è *derivabile* (oppure *segue logicamente*) da certe premesse.

Una volta fissati i simboli, occorrerà stabilire come combinarli tra loro, in modo da costruire le espressioni corrette dei nostri linguaggi formali; infatti – come abbiamo già anticipato – le espressioni di un linguaggio formale non sono altro che stringhe (successioni) di simboli, opportunamente formate.

Il modo più opportuno per selezionare le espressioni corrette di un linguaggio non è quello di fornire una lista, ma piuttosto quello di stabilire qualche *regola di formazione*, in grado di generare (a partire da simboli) tutte le *formule ben formate* (cioè tutte le espressioni ammesse nel linguaggio in questione). Senza dilungarci ulteriormente, enunciamo qui di seguito le regole di formazione per il *calcolo degli enunciati* (detto anche *calcolo proposizionale*), che è il primo linguaggio del quale ci occuperemo.

Se indichiamo con L il linguaggio formale e con le lettere $p, q, r, s, \dots$ le sue unità elementari (cioè: le proposizioni dichiarative, esprimibili come «si dà il caso che ... »), avremo:

- i. $p, q, r, s, \dots \in L$;
- ii. se $p \in L$, allora anche $\sim p \in L$;
- iii. se $p, q \in L$, allora anche $(p \wedge q), (p \vee q), (p \supset q), (p \equiv q) \in L$;
- iv. null'altro appartiene a L .

Nelle quattro regole suddette:

- la prima stabilisce che ogni proposizione elementare appartiene al linguaggio;
- la seconda specifica l'uso che nel linguaggio si può fare del connettivo negazione;
- la terza specifica l'uso che nel linguaggio si può fare dei connettivi congiunzione, disgiunzione, implicazione, bicondizionale;
- la quarta è una regola di “chiusura”, tesa ad evitare che nel linguaggio siano presenti formule diverse da quelle stabilite.

Possiamo anche notare esplicitamente che le quattro regole di formazione permettono di costruire – per iterazione – formule complesse del tipo: $((\sim r \wedge s) \supset \sim r)$, posto che r ed s appartengano a L . Infatti, se $r, s \in L$, la seconda regola garantisce che anche $\sim r$ appartiene a L ; ma, allora, la terza regola garantisce che anche $(\sim r \wedge s)$ appartiene a L ; quindi, la terza regola garantisce che anche la formula $((\sim r \wedge s) \supset \sim r)$ – appartiene a L .

Argomentazioni formali

Una volta stabilito quali siano le formule ben formate di L (d'ora in avanti: *fbf* di L), bisogna anche dire cosa siano in L le *argomentazioni formali* (o *dimostrazioni*).

In breve, possiamo dire che una argomentazione formale è una *successione di fbf*, tale che:

- l'ultimo elemento della successione è la *conclusione*;
- tutti gli altri elementi della successione sono *premesse* dell'argomentazione (oppure loro riformulazioni, ottenute secondo opportuni criteri);
- tutti gli elementi della successione sono *numerati* (secondo il loro ordine);
- la conclusione è *riconoscibile*, perché dopo di essa l'argomentazione si arresta.

II. METODO LOGISTICO E TAVOLE DELLA VERITÀ

SOMMARIO

<i>Linguaggi non interpretati</i>	9
<i>Regole semantiche</i>	10
<i>Tavole della verità</i>	12

Linguaggi non interpretati

Se volessimo riassumere in un'unica tabella in cosa consista un sistema formale, dovremmo considerare i seguenti elementi:

1. lista dei *simboli primitivi*;
2. generiche *sequenze di simboli* (espressioni generiche, di qualsiasi tipo);
3. *regole di formazione* delle sequenze di simboli, atte a selezionare le formule ben formate;
4. scelta di alcuni *assiomi*, cioè di *fbf* atte a costituire la base di partenza del linguaggio;
5. *sequenze di fbf*;
6. *regole di inferenza* (o di *derivazione*);
7. *dimostrazioni*, cioè sequenze di *fbf*, ognuna delle quale può essere ottenuta dalle *fbf* che la precedono, grazie all'applicazione delle regole di derivazione;
8. *teoremi*, cioè *fbf* che possono essere inferite grazie a dimostrazioni, a partire dagli assiomi;
9. criteri di *chiusura* (detti anche di *restrizione*), espressi per esempio come procedure atte a stabilire: a) se un simbolo oppure una *fbf* appartengano o non appartengono al linguaggio; b) se una *fbf* è o non è un assioma; c) se una certa *fbf* può o non può essere inferita da certe *fbf* che la precedono, mediante l'applicazione delle regole stabilite.

Questa concezione dei sistemi formali (che, per brevità, potremmo chiamare “*assiomatico-deduttiva*”) s'ispira al cosiddetto “metodo logistico”, introdotto nel pensiero contemporaneo da Gottlob Frege (*Begriffsschrift*, 1879) e successivamente sviluppato da Bertrand Russell e da Alfred Whitehead (*Principia Mathematica*, 1910-13). Storicamente, questo metodo fu proposto nel quadro delle ricerche e dei tentativi rivolti alla *fondazione logica* della matematica, ai quali abbiamo accennato nel primo capitolo. Anche se il programma “logicista” incontrò poi dei limiti, il metodo introdotto da Frege per la costruzione dei sistemi formali conserva ancora il suo valore.

Quanto agli elementi qui sopra indicati, abbiamo già discusso quelli relativi ai punti 1, 2, 3, 5 e 7 nel precedente capitolo. Nella stessa occasione, abbiamo anche visto come sia possibile enunciare un criterio di *chiusura* (punto 9, qui sopra indicato), onde stabilire se un certo simbolo (o una certa sequenza di simboli) appartiene o non appartiene al linguaggio. Infatti, nell'indicare i criteri di formazione delle *fbf*, dopo aver dichiarato esplicitamente quali siano le formule ammesse noi abbiamo scritto che «null'altro appartiene a *L*»; in modo analogo, si potrebbe procedere per gli assiomi e per le formule dimostrabili.

Dobbiamo allora spendere qualche parola ulteriore su quanto elencato ai punti 4, 6 e 8; l'insieme di questi punti si riferisce in effetti all'aspetto forse più rilevante (sotto il profilo sintattico) dei sistemi formali: la *teoria della dimostrazione*.

Il fatto che alcuni ambiti disciplinari particolarmente rigorosi prevedano *assiomi* non dovrebbe essere un fatto nuovo, per chi si accinga a studiare la logica. Già nella geometria euclidea s'incontra qualcosa del genere: ci sono infatti un certo numero di proposizioni che vengono assunte come base

di partenza, allo scopo di poter derivare certi teoremi. Il fatto che per fornire questa “base” vengano scelte alcune proposizioni (piuttosto che altre) viene in genere giustificato ricorrendo all’*evidenza*, alla *semplicità*, o alla presunta “*inconfutabilità*” delle proposizioni scelte. Tuttavia, proprio l’esempio della geometria suggerisce qualcosa di molto diverso: infatti, è ben noto che è possibile costruire geometrie perfettamente coerenti, le quali negano uno degli assiomi fondamentali della geometria euclidea, malgrado la sua presunta “evidenza”.

Il numero degli assiomi di un sistema formale non è stabilito a priori. Anzi, se si aumenta il numero delle regole di derivazione ammesse, il numero degli assiomi può essere diminuito. Per il primo sistema che noi studieremo (il calcolo degli enunciati, o proposizionale), faremo anzi vedere che è possibile evitare di presupporre qualunque assioma, purché si introduca un numero congruo di regole di derivazione. D’altra parte, noi accenneremo anche al fatto che il calcolo proposizionale può essere costruito anche in un modo diverso, introducendo per esempio quattro assiomi e utilizzando solo due regole di derivazione.

Quanto allora alle *regole di inferenza*, forniremo nel prossimo capitolo un elenco di dieci regole e spiegheremo in dettaglio come esse si applicano; forniremo anche – per ognuna delle regole enunciate – un esempio di applicazione corretta. Nei capitoli successivi, presenteremo altre regole, da utilizzare per il calcolo dei predicati e per quello modale.

L’applicazione delle regole d’inferenza agli assiomi consente di costruire altre *fbf*, i cosiddetti *teoremi*. In ogni sistema formale, le formule di questo genere hanno un rango del tutto speciale: infatti (rispetto alle altre formule, che non sono derivabili dagli assiomi), i teoremi costituiscono una classe privilegiata di espressioni formali, perché essi si trovano in qualche modo ad “ereditare” – grazie alle regole d’inferenza – quello statuto caratteristico che gli assiomi hanno in ogni sistema formale.

Se si ammette che gli assiomi e le regole d’inferenza di un certo sistema ne costituiscono anche il “fondamento razionale”, allora (in questo senso specifico) i teoremi possono essere considerati come formule che “mettono in mostra” tale “razionalità”, fornendone manifestazioni. Si tratta però di vedere se non sia il caso di dare qualche ulteriore criterio di “razionalità” (che non sia riconducibile al mero criterio di dipendenza formale dei teoremi, rispetto agli assiomi e alle regole di derivazione). Altrimenti, resterebbe l’impressione che tutta la “razionalità” dei logici si esaurisca soltanto nel rispetto (alquanto “meccanico”) di certe regole, dai logici stessi fissate.

Regole semantiche

In effetti, visto che ad ogni proposizione di un linguaggio formale può essere assegnato un certo *valore di verità*, viene subito alla mente che potrebbe esserci un altro criterio per valutare la “razionalità” di certe argomentazioni formali. Infatti, nell’ambito di una argomentazione “corretta”, nessuno vorrebbe ad esempio che a partire da premesse *vere* sia possibile derivare (mediante l’applicazione delle regole d’inferenza) conclusioni *false*.

Un criterio di razionalità per le argomentazioni (a parte la *correttezza*) potrebbe essere dunque quello della *validità*; un’argomentazione dovrà essere considerata logicamente *valida* se non è possibile derivare conclusioni *false*, quando le premesse siano *vere*.

Sorge allora un problema, relativo al fatto che le premesse e la conclusione di una argomentazione potrebbero essere delle formule molto complesse (cioè costituite da proposizioni più “elementari”, unite da connettivi). Ora, anche se noi abbiamo ricordato con qualche dettaglio i motivi sulla base dei quali i logici sono propensi ad assegnare alle proposizioni i valori di verità, non abbiamo ancora detto nulla sui criteri che occorre adottare per assegnare tali valori, quando le proposizioni vengono combinate tra loro, per formare proposizioni complesse. Dobbiamo insomma

analizzare quali possano essere le *regole* di combinazione dei valori di verità, per ognuno dei connettivi che abbiamo indicato.

Inoltre, abbiamo accennato anche al fatto che il logico, non potendosi appellare a controlli di tipo empirico, non sarà in grado di dire se una certa proposizione *corrisponda ai fatti*, o non sia per caso smentita da essi; in altre parole (a parte alcune verità *di tipo logico*, che avremo modo di incontrare nel corso del nostro studio), il logico non ha alcun modo di accertare la verità o la falsità di una certa proposizione. Nel caso di una proposizione complessa, il logico dovrà limitarsi ad *assegnare ipoteticamente* i valori di verità alle proposizioni “elementari”; ciò fatto, il logico potrà calcolare (grazie alle regole di combinazione stabilite per i diversi connettivi) quale sia il valore di verità della proposizione complessa. Nel gergo dei logici, una assegnazione ipotetica di valori di verità costituisce una *interpretazione* del linguaggio formale; infatti, nell’assegnare valori di verità, ogni nome viene sostituito con ciò che il nome propriamente *denota* (il suo valore di verità). Interpretare un linguaggio formale, assegnare ai suoi simboli certi valori, equivale dunque a costruire una *semantica* (per quel linguaggio).

Possiamo rendere più concreto il discorso, cominciando a vedere quali siano le regole di combinazione dei valori di verità, per i connettivi che abbiamo introdotto. Per farlo, useremo alcune tabelle: sulle colonne di sinistra indicheremo i valori di verità attribuibili alle proposizioni “elementari” considerate; sulle colonne di destra indicheremo invece i valori di verità risultanti, per le proposizioni complesse.

Iniziamo dalla negazione, che è il connettivo più semplice, perché si applica a un solo enunciato. Se indichiamo con “p” l’enunciato in questione e con “v” e “f” i valori di verità che esso può denotare, avremo:

p	~p
v	f
f	v

Come abbiamo già anticipato, sulla sinistra abbiamo indicato i due valori di verità che p è in grado di assumere; sulla destra, abbiamo indicato i corrispondenti valori di verità della proposizione complessa ~p. Sotto il profilo del valore di verità, l’uso della negazione non si discosta in logica da quello ordinario

Analogamente, per gli altri connettivi avremo:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
v	v	v	v	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	f	v	v	f
f	f	f	f	v	v

Anche queste tabelle mostrano che l’uso dei connettivi logici non si discosta in maniera significativa da quello adottato per le congiunzioni ordinarie: per esempio, anche nel linguaggio di tutti i giorni l’enunciato «piove e fa freddo» è vero soltanto nel caso in cui sia dia il caso che piova e – *insieme* – sia dia il caso che faccia freddo; se anche una sola delle due condizioni viene a mancare, l’enunciato composto «piove e fa freddo» diventa falso.

L'unico caso un po' anomalo, rispetto all'uso ordinario, è quello del *connettivo condizionale*: infatti, noi abbiamo indicato nella tabella che la proposizione $(p \supset q)$ è *vera*, in tutti e due i casi in cui l'antecedente è indicato come *falso*; ora, questo potrebbe sembrare un po' strano, giacché una implicazione il cui antecedente risulti falso potrebbe essere giudicata fin dall'inizio come qualcosa di inconsistente, destinata a generare altre falsità. Però, nell'introdurre il connettivo condizionale, noi abbiamo volutamente insistito sul fatto che – tra tutte le combinazioni di p e di q che si possono immaginare – l'espressione $(p \supset q)$ esclude soltanto il caso in cui l'antecedente si dia e il conseguente *non* si dia; tradotto in termini di valori di verità, ciò corrisponde a dire che *l'unico caso in cui un'implicazione è falsa è quello in cui l'antecedente è vero ed il conseguente è falso*; si tratta, appunto, di quanto noi abbiamo indicato in tabella. Faremo vedere più avanti che – sia sotto il profilo sintattico che sotto il profilo semantico – la proposizione $(p \supset q)$ è perfettamente equivalente alla proposizione $\sim(p \wedge \sim q)$; , infatti, quest'ultima afferma proprio questo: «*non si dà il caso che si dia p e – insieme – non si dia q* ».

Abbiamo così stabilito quali siano le *regole semantiche* per i connettivi che noi utilizzeremo nel calcolo proposizionale; ogni regola indica quale sia il valore di verità che va attribuito a una certa proposizione complessa, quando questa sia costruita mediante l'applicazione di uno specifico connettivo. Sulla base di tali regole, siamo ora in grado di assegnare un valore di verità a qualsiasi *fbf* (comunque complessa) del nostro linguaggio formale.

Tavole della verità

Il fatto che le argomentazioni di un sistema formale debbano essere *corrette* e – insieme – debbano essere *valide*, corrisponde a due aspetti fondamentali della logica contemporanea: l'aspetto *sintattico* e quello *semantico*.

Come abbiamo già detto, la correttezza sintattica sta tutta nel fatto che *ogni dimostrazione formale rispetta scrupolosamente le regole d'inferenza*; la validità consiste invece nel fatto che – alla fine di una dimostrazione – *la conclusione risulta implicitamente legata, sotto il profilo semantico, alle premesse dalle quali la dimostrazione ha avuto inizio*; in particolare: *per ogni interpretazione dei termini che renda vere le premesse, dovrà risultare vera anche la conclusione*.

Per evidenti motivi di adeguatezza, è opportuno che gli *assiomi* scelti per formare la base di un sistema formale risultino *veri per qualsiasi interpretazione dei loro termini* (siano cioè *tautologici*); solo in questo caso, sarà possibile derivare da essi altre verità, per qualsiasi interpretazione dei termini. Pertanto, sulla base del criterio enunciato al precedente capoverso, questa caratteristica risulterà condivisa da tutti *teoremi* (cioè: da tutte le proposizioni che possono essere derivate a partire dagli assiomi). In effetti, accenneremo alla fine del prossimo capitolo a una proprietà del tutto generale, che è tipica dei sistemi formali più elementari: per questi sistemi, *c'è una piena corrispondenza tra gli aspetti semantici e quelli sintattici*.

Per il momento, non disponendo ancora di alcuna prova di questa corrispondenza, dovremo accontentarci di rilevare che – a conti fatti – ognuno dei teoremi che noi dimostreremo è anche una tautologia. A questo scopo, ci tornerà utile utilizzare il metodo delle tabelle (dette anche “tavole della verità”), introdotto nel precedente paragrafo; infatti, questo metodo è adatto ad esprimere i valori di verità di ogni proposizione, comunque complessa.

Per iniziare, controlliamo i possibili valori di verità della proposizione complessa $\sim(p \wedge \sim q)$; come abbiamo già avuto occasione di anticipare nel precedente paragrafo, faremo vedere che tali valori di verità sono identici a quelli dell'implicazione $(p \supset q)$.

Notiamo in primo luogo che il *connettivo principale*, nella formula $\sim(p \wedge \sim q)$, è la negazione che compare al di fuori della parentesi; infatti, essa specifica il valore di verità dell'intera espressione, una volta che sia stato calcolato il valore di verità della formula più elementare,

racchiusa in parentesi. Perciò, procedendo dai termini più elementari e calcolando via via il valore dei termini più complessi, avremo:

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$	$p \supset q$
v	v	f	f	v	v
v	f	v	v	f	f
f	v	f	f	v	v
f	f	v	f	v	v

Nella penultima colonna sono indicati i valori di verità della formula $\sim(p \wedge \sim q)$, della quale ci stiamo occupando; come volevamo mostrare, tali valori risultano del tutto identici a quelli della formula $(p \supset q)$, che abbiamo riportato per comodità nell'ultima colonna.

Occupiamoci poi della formula $(p \wedge \sim p)$ e della formula $\sim(p \wedge \sim p)$ (che nega la prima). Avremo:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
v	f	f	v
f	v	f	v

La formula $\sim(p \wedge \sim p)$ è *sempre vera*, per qualunque interpretazione di p; si tratta, pertanto, d'una *tautologia*. Si può dimostrare che questa formula è anche un *teorema* (infatti, si tratta del famoso “principio di non contraddizione”). La formula $(p \wedge \sim p)$ è invece *sempre falsa*, per qualsiasi interpretazione di p. Si tratta, sotto il profilo logico, d'una *contraddizione*, nella misura in cui essa pretende che un certo ente *si dia* e (al tempo stesso e sotto lo stesso profilo) che quel medesimo ente *non si dia*. Avremo modo di incontrare nel prossimo capitolo una specifica regola di derivazione, tesa ad evitare situazioni di questo genere.

Come applicazione del metodo delle tavole della verità, diamo infine qualche altro esempio di tautologie, lasciando per ora al lettore l'onere di calcolarne il valore di verità, per qualsiasi interpretazione dei termini.

<i>Modus ponendo ponens:</i>	$((p \supset q) \wedge p) \supset q$
<i>Modus tollendo tollens:</i>	$((p \supset q) \wedge \sim q) \supset \sim p$
<i>Identità:</i>	$p \supset p$
<i>Terzo escluso:</i>	$(p \vee \sim p)$
<i>De Morgan:</i>	$(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$
<i>Commutazione della congiunzione:</i>	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
<i>Commutazione della disgiunzione:</i>	$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$
<i>Distribuzione della congiunzione:</i>	$(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
<i>Distribuzione della disgiunzione:</i>	$(p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$
<i>Primo paradosso dell'implicazione:</i>	$p \supset (q \supset p)$
<i>Secondo paradosso dell'implicazione:</i>	$\sim p \supset (p \supset q)$

III. CALCOLO PROPOSIZIONALE

SOMMARIO

Regole.....	14
Teoremi	16
Validità.....	18

Regole

Nel secondo capitolo di questi appunti, abbiamo fornito l'elenco di tutti gli elementi che sono necessari per la costruzione di un sistema formale; nello stesso capitolo, abbiamo esaminato alcuni aspetti semantici della logica elementare, introducendo le nozioni di *interpretazione* e di *validità*. Siamo quindi in grado di procedere alla costruzione del primo sistema di cui ci occuperemo, il cosiddetto "*calcolo degli enunciati*" (o *calcolo proposizionale*). Per farlo – alla luce di quanto abbiamo detto nel primo paragrafo del precedente capitolo – dobbiamo fissare un certo numero di *assiomi* e stabilire alcune regole di *derivazione*.

Come abbiamo già detto, la scelta di alcuni assiomi – piuttosto che altri – non è affatto obbligata: assiomi *diversi* (e *diverse* regole di derivazione) possono generare lo stesso sistema formale. Per esempio, il calcolo proposizionale può essere costruito seguendo il metodo proposto da Frege, oppure secondo i metodi proposti rispettivamente da Russell, da Hilbert-Bernays, da Hilbert-Ackermann, da Łukasiewicz o da Sobocinski. Anche il *numero* degli assiomi è variabile: è uguale a 3 assiomi nel sistema di Łukasiewicz e a 15 nel sistema di Hilbert-Bernays. In genere, se si aumenta il numero delle regole di derivazione, il numero degli assiomi può essere diminuito. Introducendo un numero adeguato di regole, il numero degli assiomi può essere addirittura annullato. Noi adotteremo infatti il cosiddetto metodo della "*deduzione naturale*", che non prevede alcun assioma.

Le tecniche di *deduzione naturale* (sviluppate da G. Gentzen, da S. Jaskowski e da F. Fitch) prevedono 10 regole. Noi adotteremo l'impostazione di Fitch, che consiste in sintesi in questo: per ognuno dei 5 connettivi che abbiamo introdotto (negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione, bicondizionale), fisseremo le condizioni in virtù delle quali il connettivo può essere *introdotto* o *eliminato*, a un certo punto della dimostrazione.

Iniziamo da una considerazione di carattere generale e da una convenzione di carattere grafico:

- ad ogni passo di una dimostrazione è sempre possibile introdurre una *fbf* qualsiasi, la quale dovrà essere considerata come un *assunto* dell'argomentazione in corso; ovviamente, giacché questa *fbf* ci servirà per derivare altre *fbf*, dovremo tener conto della sua introduzione, registrandola come una *premessa* della dimostrazione; tuttavia, qualche regola potrebbe permetterci di "scaricare" l'assunto in questione, la cui introduzione risulterebbe allora temporanea; quattro delle nostre regole consentono proprio tale operazione;
- su ogni riga della dimostrazione, partendo dalla sinistra, noi scriveremo:
 - i. i numeri d'ordine di tutte le assunzioni da cui dipende l'argomento, a quel dato passo;
 - ii. il numero d'ordine di quel dato passo;
 - iii. la *fbf* derivata (oppure assunta) a quel dato passo;

- iv. la regola (o l'assunzione) che noi abbiamo impiegato, per raggiungere quella *fbf* (aggiungendo, nel caso, i numeri d'ordine delle righe alle quali la regola è stata applicata); ogni volta che introdurremo una *fbf* in una dimostrazione, scriveremo il simbolo "A" accanto alla formula.

Gli esempi che seguono renderanno familiare questa convenzione grafica.

Ciò posto, possiamo ad elencare le regole, fornendo – per alcune di esse – un esempio di applicazione.

I. **$E\wedge$** (eliminazione delle congiunzioni):

da ogni congiunzione è consentito derivare uno qualsiasi dei congiunti.

Per esempio:

1	(1)	$p \wedge q$	A
1	(2)	p	$E\wedge 1$

II. **$I\wedge$** (introduzione della congiunzione):

quando siano date due (o più) fbf, è consentito derivare la loro congiunzione.

Per esempio:

1	(1)	p	A
2	(2)	q	A
1,2	(3)	$p \wedge q$	$I\wedge 1,2$

III. **$E\supset$** (eliminazione della implicazione, o *modus ponendo ponens*):

quando siano dati un condizionale e il suo antecedente, è consentito derivare il conseguente.

Per esempio:

1	(1)	$p \supset q$	A
2	(2)	$q \supset r$	A
3	(3)	p	A
1,3	(4)	q	$E\supset 1,3$
1,2,3	(5)	r	$E\supset 2,4$

IV. **$I\supset$** (introduzione dell'implicazione, o *prova condizionale*):

se da una certa fbf è possibile derivare un'altra fbf, allora è consentito concludere che la prima implica la seconda.

V. **$I\vee$** (introduzione della disgiunzione):

da ogni fbf è consentito derivare la sua disgiunzione con ogni altra fbf.

Per esempio:

1	(1)	p	A
1	(2)	$p \vee q$	$I\vee 1$

VI. **$E\vee$** (eliminazione della disgiunzione):

è consentito derivare una certa fbf dalla disgiunzione di altre fbf, purché quella fbf risulti derivabile da ognuna delle fbf disgiunte, singolarmente presa.

VII. **$I\equiv$** (introduzione della doppia implicazione):

se da una certa *fbf* è possibile derivarne un'altra e da questa seconda è possibile derivare la prima, allora è consentito concludere che le due *fbf* si implicano reciprocamente.

VIII. $E\equiv$ (eliminazione della doppia implicazione):

se due *fbf* si implicano reciprocamente, allora da ognuna di essa è consentito derivare l'altra.

IX. $E\sim$ (eliminazione della negazione, o doppia negazione)

dalla negazione della negazione di qualunque *fbf* è consentito derivare la *fbf* stessa.

X. $I\sim$ (introduzione della negazione, o *reductio ad absurdum*):

se dall'assunzione di una certa *fbf* segue una contraddizione, allora è consentito negare la *fbf* che l'ha generata.

Per esempio:

1	(1)	$p \supset q$	A
2	(2)	$p \supset \sim q$	A
3	(3)	p	A
1,3	(4)	q	$E\supset 1,3$
2,3	(5)	$\sim q$	$E\supset 2,3$
1,2,3	(6)	$q \wedge \sim q$	$I\wedge 4,5$
1,2	(7)	$\sim p$	$I\sim 3,6$

Si deve notare che la regola $I\sim$, introdotta alla riga (7), consente di “scaricare” l'assunzione 3, la quale appariva sia nella riga (3) che nella riga (6) (cioè nelle due righe alle quali è stata applicata la regola $I\sim$). Infatti, l'emergere di una contraddizione rende manifesto che una almeno delle assunzioni è incompatibile con le altre; per questo motivo, alla riga 7), nell'elenco delle assunzioni (riportato a sinistra) non compare più l'assunzione 3.

Teoremi

Nel precedente capitolo, abbiamo già anticipato che chiameremo “teoremi” tutte le quelle formule che risultino dimostrabili entro un sistema formale, quando si assumano come premesse gli assiomi. Giacché per costruire il calcolo proposizionale noi non abbiamo presupposto alcun assioma, potremo anche asserire che *nel sistema di “deduzione naturale” è un teorema del calcolo ogni *fbf* che risulti dimostrabile senza alcuna assunzione*, facendo uso di qualcuna delle 10 regole di derivazione.

Per indicare che una certa *fbf* è dimostrabile (oppure che essa è un teorema), conviene introdurre un nuovo simbolo. D'ora in avanti, noi converremo che il fatto di anteporre il simbolo “ $\vdash$ ” a una *fbf* segnali il fatto che quella *fbf* è *dimostrabile*, laddove si assumano come premesse le *fbf* che sono scritte a sinistra del simbolo. Per esempio, nel caso del *modus ponendo ponens*, noi potremmo enunciare sinteticamente la regola $E\supset$ in questo modo: $p \supset q, q \vdash p$.

Visto che nel sistema di “deduzione naturale” i teoremi sono dimostrabili senza alcuna premessa, utilizzando lo stesso simbolo noi potremo anche dire che *un teorema si riconosce per il fatto che* (nella formula che esprime la sua dimostrabilità) *a sinistra del simbolo “ $\vdash$ ” non compare alcuna premessa*.

Ciò posto, passiamo ad esporre alcuni teoremi del calcolo proposizionale, iniziando dal *modus tollendo tollens*. Abbiamo già anticipato che in alcuni sistemi formali questo teorema è assunto come una regola: *quando siano dati un condizionale e la negazione del suo conseguente, è sempre*

consentito derivare la negazione dell'antecedente. Faremo vedere dapprima che da $p \supset q$ e da $\sim q$ è possibile derivare $\sim p$; successivamente, dimostreremo il teorema corrispondente.

In forma sintetica, potremmo scrivere:

Modus tollendo tollens (regola): $p \supset q, \sim q \vdash \sim p$

1	(1)	$p \supset q$	A
2	(2)	$\sim q$	A
3	(3)	p	A
1,3	(4)	q	$E \supset 1,3$
1,2,3	(5)	$q \wedge \sim q$	$I \wedge 2,4$
1,2	(6)	$\sim p$	$I \sim 3,5$

Modus tollendo tollens (teorema): $\vdash ((p \supset q) \wedge \sim q) \supset \sim p$

1	(1)	$(p \supset q) \wedge \sim q$	A
1	(2)	$p \supset q$	$E \wedge 1$
3	(3)	p	A
1,3	(4)	q	$E \supset 2,3$
1	(5)	$\sim q$	$E \wedge 1$
1,3	(6)	$q \wedge \sim q$	$I \wedge 4,5$
1	(7)	$\sim p$	$I \sim 3,6$
	(8)	$(p \supset q) \wedge \sim q \supset \sim p$	$I \supset 1,7$

Passiamo poi a dimostrare altri tre teoremi del calcolo proposizionale, i quali danno una veste formale a tre “principi” logici, che la tradizione filosofica ha presentato a più riprese come i principi stessi della ragione. Si tratta, ovviamente, del *principio di non contraddizione*, del *principio d'identità* e del *principio del terzo escluso*.

Non contraddizione: $\vdash \sim(p \wedge \sim p)$

1	(1)	$p \wedge \sim p$	A
	(2)	$\sim(p \wedge \sim p)$	$I \sim 1,1$

Identità: $\vdash (p \supset p)$

1	(1)	p	A
	(2)	$p \supset p$	$I \supset 1,1$

Terzo escluso: $\vdash (p \vee \sim p)$

1	(1)	$\sim(p \vee \sim p)$	A
1	(2)	$\sim p \wedge \sim \sim p$	<i>De Morgan 1</i>
1	(3)	$\sim p \wedge p$	$E \sim 2$
	(4)	$\sim \sim (p \vee \sim p)$	$I \sim 1,3$
	(5)	$p \vee \sim p$	$E \sim 4$

Alla seconda riga dell'ultima dimostrazione abbiamo utilizzato il cosiddetto *teorema di De Morgan*, che permette di trasformare le disgiunzioni in congiunzioni (e viceversa). Lo enunciamo qui di seguito, insieme ad altri teoremi fondamentali.

De Morgan: $\vdash (p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$

Commutazione della congiunzione: $\vdash (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$,

Commutazione della disgiunzione: $\vdash (p \vee q) \equiv (q \vee p)$.

Distribuzione della congiunzione rispetto alla disgiunzione: $\vdash (p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

Distribuzione della disgiunzione rispetto alla congiunzione: $\vdash (p \vee (q \wedge r)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Filone megarico: $\vdash (p \supset q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

Infine, un accenno va fatto ai due seguenti teoremi, che mettono in luce due aspetti notevoli dell'implicazione. Per motivi che saranno illustrati più avanti, i teoremi in questione prendono il nome di *paradossi dell'implicazione materiale*.

Primo paradosso dell'implicazione: $\vdash p \supset (q \supset p)$

Secondo paradosso dell'implicazione: $\vdash \sim p \supset (p \supset q)$

A conclusione di questa sezione, ricapitoliamo in forma sintetica tutte le regole che abbiamo introdotto nel nostro primo sistema formale.

$E\wedge$	eliminazione della congiunzione:	$p \wedge q \vdash p$ (oppure: $p \wedge q \vdash q$)
$I\wedge$	introduzione della congiunzione:	$p, q \vdash p \wedge q$
$E\supset$	eliminazione della implicazione:	$p \supset q, p \vdash q$
$I\supset$	introduzione della implicazione:	$(p \vdash q) \vdash p \supset q$
$E\vee$	eliminazione della disgiunzione:	$(p \vdash r, q \vdash r) \vdash (p \vee q \vdash r)$
$I\vee$	introduzione della disgiunzione:	$p \vdash p \vee q$
$E\equiv$	eliminazione del bicondizionale:	$p \equiv q, p \vdash q$ (oppure: $p \equiv q, q \vdash p$)
$I\equiv$	introduzione del bicondizionale:	$(p \vdash q, q \vdash p) \vdash p \equiv q$
$E\sim$	eliminazione della negazione:	$\sim\sim p \vdash p$
$I\sim$	introduzione della negazione:	$(p \vdash q \wedge \sim q) \vdash \sim p$

Possiamo notare allora, esplicitamente, che:

- il teorema di Filone megarico consente di esprimere l'implicazione mediante altri connettivi (la negazione e la congiunzione);
- il teorema di De Morgan consente di esprimere la disgiunzione mediante altri connettivi (la negazione e la congiunzione);
- la regola di eliminazione del bicondizionale consente di esprimere quest'ultimo mediante l'implicazione.

In definitiva, in luogo dei cinque connettivi che abbiamo utilizzato, ne avremmo potuto utilizzare soltanto due (per esempio: la negazione e la congiunzione); si preferisce in genere utilizzarne cinque, allo scopo di rendere più semplici le formule, consentendo una comprensione più rapida del loro contenuto logico.

Validità

Nel precedente capitolo, abbiamo detto che la *validità* di una dimostrazione consiste in questo: *per ogni interpretazione dei termini che renda vere le premesse, dovrà risultare vera anche la conclusione*. Abbiamo anche detto che gli *assiomi* di un sistema formale devono essere *tautologici* (cioè veri per qualsiasi interpretazione dei loro termini) e che tali devono risultare anche i *teoremi*.

Se si adotta il sistema della “deduzione naturale”, tutti gli assiomi vengono rimpiazzati da un numero adeguato di regole; tutti i teoremi possono essere dimostrati grazie alle sole regole, senza alcuna premessa. Occorre dunque specificare cosa s’intenda in questo caso per “validità”; infatti, visto che in questo caso non c’è bisogno di alcuna premessa, non avrebbe alcun senso parlare dei valori di verità delle premesse. Noi estenderemo pertanto la nozione di “validità” agli stessi teoremi (oltre che alle dimostrazioni) e diremo che nel nostro sistema formale una *fbf* è *valida*, se essa è vera per qualsiasi interpretazione dei suoi termini.

Applicando il metodo delle tavole della verità, facciamo dunque vedere che alcuni teoremi del calcolo proposizionale sono *validi*, perché sono tautologie; forniamo in altri termini la soluzione di alcuni degli esercizi proposti alla fine del precedente capitolo. Ci occuperemo soltanto di alcuni dei teoremi incontrati in questo capitolo, lasciando al lettore il controllo degli altri.

$$\vdash (p \supset p)$$

p	p	$p \supset p$
v	v	v
f	f	v

$$\vdash (p \vee \sim p)$$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
v	f	v
f	v	v

$$\vdash (p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \vee q) \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$
v	v	v	f	f	f	v	v
v	f	v	f	v	f	v	v
f	v	v	v	f	f	v	v
f	f	f	v	v	v	f	v

$$\vdash (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
v	v	v	v	v
v	f	f	f	v
f	v	f	f	v
f	f	f	f	v

IV. CALCOLO DEI PREDICATI

SOMMARIO

<i>Proposizioni categoriche</i>	20
<i>Sillogismi</i>	21
<i>Regole di derivazione</i>	23
<i>Risultati notevoli</i>	23

Ci occuperemo ora del “calcolo dei predicati”. Si tratta di utilizzare un linguaggio formale in grado di esprimere l’appartenenza di certi enti a certe categorie; inoltre, il linguaggio in questione fa uso dei *quantificatori*, cui abbiamo già avuto occasione di accennare nel secondo capitolo.

Per capire grossolanamente di cosa si tratta (e di quale sia la differenza rispetto al calcolo proposizionale), supponiamo che N individui – denotati mediante i simboli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ – godano tutti della proprietà F . Per il significato stesso del quantificatore universale “ $\forall$ ”, potremmo porre allora:

$$F a_1 \wedge F a_2 \wedge F a_3 \wedge \dots \wedge F a_n \equiv \forall x Fx.$$

Insomma: *una predicazione universale equivale alla congiunzione di singoli enunciati predicativi*, purché questi esprimano la medesima predicazione, per tutti gli individui presenti in un certo dominio. Analogamente, nel caso in cui uno solo degli individui in questione goda della proprietà F , potremmo porre:

$$F a_1 \vee F a_2 \vee F a_3 \vee \dots \vee F a_n \equiv \exists x Fx.$$

Insomma: *una predicazione esistenziale equivale alla disgiunzione di singoli enunciati predicativi*, purché questi esprimano la medesima predicazione, per tutti gli individui presenti in un certo dominio.

Ovviamente, il fatto che i quantificatori siano in grado di “vincolare” qualsiasi variabile (quale che sia il suo dominio) rende possibile considerare anche il caso in cui il numero degli individui oggetto della predicazione *non sia limitato*; per esempio, l’esistenza di numeri dispari, nel dominio dei numeri naturali, potrebbe essere espressa dalla formula: $\exists x (Nx \wedge Dx)$ (posto che il simbolo “ N ” denoti la proprietà di essere un numero naturale e il simbolo “ D ” la proprietà di essere un numero dispari); in questo esempio, il dominio di definizione della variabile copre tutta la classe dei numeri naturali.

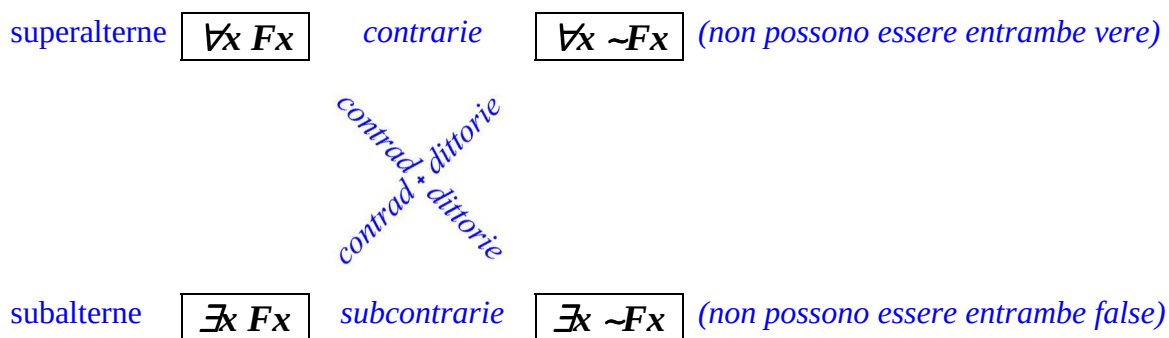
Proposizioni categoriche

Una predicazione *universale affermativa* (del tipo $\forall x Fx$) asserisce che *non esiste* alcun individuo il quale sia esente da quel particolare predicato; ma la formula $\sim \exists x \sim Fx$ asserisce proprio la stessa cosa. Analogamente, una predicazione *esistenziale affermativa* (del tipo $\exists x Fx$) equivale ad asserire non tutti gli individui sono esenti da quel particolare predicato (in formula: $\sim \forall x \sim Fx$). Insomma, per il ruolo stesso che i quantificatori hanno nel linguaggio formale, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\forall x Fx &\equiv \sim \exists x \sim Fx \\ \exists x Fx &\equiv \sim \forall x \sim Fx \\ \forall x \sim Fx &\equiv \sim \exists x Fx \\ \exists x \sim Fx &\equiv \sim \forall x Fx\end{aligned}$$

Tutto ciò suggerisce che – rigori – *un solo quantificatore basterebbe per esprimere qualunque tipo di predicazione*; ma, se si adottasse davvero un solo quantificatore, ciò andrebbe a scapito della semplicità del linguaggio e della comodità di scrittura; per questo, noi continueremo ad utilizzare entrambi i quantificatori.

Per la loro particolare struttura, le formule che abbiamo riprodotto qui sopra possono essere rappresentate mediante uno schema molto espressivo, che ne chiarisce le relazioni. Considerando le predicazioni che stanno a sinistra del bicondizionale, abbiamo infatti il cosiddetto “*quadrato delle opposizioni*”:



Le forme più generali della predicazione erano note fin dalla logica antica. Dato che esse esprimono l'appartenenza di certi enti a certe *categorie*, è rimasto l'uso di chiamarle ancora oggi “*proposizioni categoriche*”. Vediamo di cosa si tratta.

Notiamo innanzi tutto che le proposizioni categoriche sono quattro. Infatti, dato che *con ognuno dei due quantificatori è possibile esprimere una predicazione sia positiva che negativa*, le combinazioni possibili sono:

A	universalì affermative:	«tutti gli S sono P»	$\forall x (Sx \supset Px)$
I	particolari affermative:	«qualche S è P»	$\exists x (Sx \wedge Px)$
E	universalì negative:	«nessun S è P»	$\forall x (Sx \supset \sim Px)$
O	particolari negative:	«qualche S non è P»	$\exists x (Sx \wedge \sim Px)$

All'estrema sinistra, abbiamo riportato le quattro lettere maiuscole che nella tradizione antica identificavano i diversi tipi di giudizio categorico; come si può notare, si tratta delle prime due vocali che compaiono nelle parole *affirmo* e *nego* (le quali distinguono, appunto, le affermazioni dalle negazioni).

Sillogismi

Nella logica antica, la forma canonica delle argomentazioni era quella del *sillogismo*: si tratta di una forma di ragionamento che venne introdotta da Aristotele negli *Analitici Primi* e che costituisce senza dubbio la parte più caratteristica e rilevante della logica classica.

Si parla di *sillogismo* quando si è in presenza di un argomento deduttivo costituito da *due premesse* e da *una conclusione*. Si parla di *sillogismo categoriale* se le *premesse* e la *conclusione* del sillogismo sono *proposizioni categoriche*, le quali contengono soltanto *tre termini*, ciascuno dei

quali ricorre in due delle proposizioni. Si parla infine di *sillogismo categoriale in forma normale* se le premesse e la conclusione sono tutte proposizioni categoriche (nelle forme normali **A**, **E**, **I** oppure **O**), disposte in un ordine definito.

Quanto ai *termini* di un sillogismo categoriale, valgono i seguenti simboli e le seguenti definizioni:

- **P** termine *maggiore*: *predicato* della conclusione
- **S** termine *minore*: *soggetto* della conclusione
- **M** termine *medio*: termine che compare *in entrambe le premesse*

Infine, giacché il termine medio di un sillogismo può comparire sia come *soggetto* che come *predicato*, sia nella *prima* che nella *seconda* premessa, si hanno *quattro diverse possibilità* (le cosiddette “figure” del sillogismo):

	soggetto	predicato	
prima figura	M S	P M	premessa maggiore premessa minore
seconda figura	P S	M M	premessa maggiore premessa minore
terza figura	M M	P S	premessa maggiore premessa minore
quarta figura	P M	M S	premessa maggiore premessa minore

Se per esempio volessimo costruire un sillogismo della *quarta figura*, costituito da una *universale affermativa* (A), da una *universale negativa* (E) e da un’altra *universale negativa* (E), avremmo:

A	«tutti i gatti sono felini »	<i>premessa maggiore</i>
E	«nessun felino è un cetaceo »	<i>premessa minore</i>
E	«nessun gatto è un cetaceo »	<i>conclusione</i>

Tradizionalmente, ci si riferisce a sillogismi di questo genere con la sigla “AEE-4”, la quale segnala il fatto che si tratta appunto di un sillogismo della quarta figura, composto da una premessa di tipo A, da un’altra premessa di tipo E, da una conclusione di tipo E.

Combinando le varie forme di proposizioni categoriche e le varie figure, è possibile costruire un numero abbastanza alto di sillogismi; ma non tutti costituiscono argomentazioni valide; anzi, il numero dei *sillogismi validi* è abbastanza ristretto. Giacché un sillogismo è composto da una *terna* di proposizioni categoriche ed ognuna di queste può avere *quattro* possibili forme (A, E, I oppure O), il numero totale delle combinazioni possibili (le possibili combinazioni di quattro elementi a tre a tre) risulta essere pari a 64. Inoltre, per ognuna di queste terne il termine medio può essere messo in una delle *quattro* figure. In totale, le forme del sillogismo categorico risultano dunque pari a 64×4, cioè a 256. Si può però dimostrare che soltanto una parte molto ristretta di queste terne costituisce una argomentazione valida; per l’esattezza, il numero dei sillogismi validi è pari a 15. Per ricordare quali fossero, gli antichi logici avevano escogitato una lista di parole, le cui vocali indicano l’ordine delle proposizioni categoriali che formano i sillogismi in questione:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|--------------------------|---------------------------|
| 1) AAA-1 <i>Barbara</i> | 5) AEE-2 <i>Camestres</i> | 9) AII-3 <i>Datisi</i> | 13) AEE-4 <i>Camenes</i> |
| 2) EAE-1 <i>Celarent</i> | 6) EAE-2 <i>Cesare</i> | 10) IAI-3 <i>Disamis</i> | 14) IAI-4 <i>Dimaris</i> |
| 3) AII-1 <i>Darii</i> | 7) AOO-2 <i>Baroco</i> | 11) EIO-3 <i>Ferison</i> | 15) EIO-4 <i>Fresison</i> |
| 4) EIO-1 <i>Ferio</i> | 8) EIO-2 <i>Festino</i> | 12) OAO-3 <i>Bocardo</i> | |

Possiamo considerare, ad esempio, i seguenti argomenti:

AII-1 Tutti gli **M** sono P
Qualche **S** è **M**
Qualche S è P

EIO-3 Nessun **M** è P
Qualche **M** è S
Qualche S non è P

EAE-2 Nessun P è **M**
Tutti gli **S** sono **M**
Nessun S è P

EIO-4 Nessun P è **M**
Qualche **M** è S
Qualche S non è P

Regole di derivazione

Le regole di derivazione per il calcolo dei predicati possono essere introdotte in perfetta analogia a quanto già abbiamo fatto per il calcolo degli enunciati. Visto che i simboli impropri che dobbiamo considerare (in aggiunta ai soliti connettivi) sono soltanto due (il quantificatore $\forall$ e il quantificatore $\exists$), dovremo aggiungere altre *quattro regole* (di *eliminazione* e di *introduzione*, per ognuno dei due quantificatori). Passiamo dunque ad elencarle, fornendo – per un paio di esse – un esempio di applicazione.

XI. **$E\forall$** (eliminazione del quantificatore universale):
da una predicazione universale è consentito derivare una qualunque delle sue esemplificazioni.

Per esempio:

1	(1)	$\forall x (Fx \supset Gx)$	A
2	(2)	Fa	A
1	(3)	$Fa \supset Ga$	$E\forall 1$
1,2	(4)	Ga	$E\supset 1,2$

XII. **$I\forall$** (introduzione del quantificatore universale):
da una formula che esprime una predicazione per un individuo arbitrario (appartenente a un certo dominio) è consentito derivare la predicazione universale per tutti gli individui appartenenti al dominio; l'arbitrarietà dell'individuo in questione deve essere garantita dal fatto che il termine che lo designa non deve comparire nelle premesse della dimostrazione.

XIII. **$I\exists$** (introduzione del quantificatore esistenziale):
se un individuo particolare gode di una certa proprietà, è consentito concludere che esiste almeno un individuo che gode di quella proprietà

Per esempio:

1	(1)	$\forall x Fx$	A
1	(2)	Fa	$E\forall 1$
1	(3)	$\exists x Fx$	$I\exists 2$

XIV. **$E\exists$** (eliminazione del quantificatore esistenziale):
se da una esemplificazione arbitraria di una certa predicazione esistenziale è possibile concludere qualcosa, allora è consentito derivare questa stessa conclusione dalla predicazione esistenziale in questione; anche in questo caso, l'arbitrarietà dell'esemplificazione deve essere garantita dal fatto che il termine che la designa non deve comparire nelle premesse della dimostrazione

Risultati notevoli

Applicando le quattro regole che abbiamo introdotto, il calcolo dei predicati può essere sviluppato in modo analogo al calcolo proposizionale.

Senza sviluppare le dimostrazioni, riportiamo qui di seguito alcuni risultati notevoli, che hanno una chiara corrispondenza con i teoremi analoghi del calcolo proposizionale.

Non contraddizione: $\vdash \forall x \neg(Fx \wedge \neg Fx)$

<i>Identità:</i>	$\vdash \forall x (Fx \supset Fx)$
<i>Terzo escluso:</i>	$\vdash \forall x (Fx \vee \sim Fx)$
<i>Distribuzione dell'universale:</i>	$\vdash \forall x (Fx \wedge Gx) \equiv \forall x Fx \wedge \forall x Gx$
<i>Distribuzione dell'esistenziale:</i>	$\vdash \exists x (Fx \vee Gx) \equiv \exists x Fx \vee \exists x Gx$
<i>Filone megarico:</i>	$\vdash \forall x (Fx \supset Gx) \equiv \sim \exists x (Fx \wedge \sim Gx)$
<i>Primo paradosso dell'implicazione:</i>	$\vdash \forall x Fx \supset \forall x (Gx \supset Fx)$
<i>Secondo paradosso dell'implicazione:</i>	$\vdash \forall x \sim Fx \supset \forall x (Fx \supset Gx)$

V. CALCOLO MODALE

SOMMARIO

Sistemi assiomatizzati	25
Paradossi dell'implicazione.....	25
Tipi di modalità.....	26
Implicazione stretta.....	28
Sistemi modali.....	29
Sistema T.....	30
Sistemi S4, S5.....	31
Modalità ed esistenza.....	31

Sistemi assiomatizzati

Nell'introdurre il calcolo degli enunciati, noi abbiamo adottato il metodo della *deduzione naturale*, il quale è costituito da *10 regole di derivazione* e da *nessun assioma* iniziale. Possiamo anche aggiungere (senza poterlo qui dimostrare) che il metodo di derivazione da noi adottato è *completo*, giacché consente di dimostrare *tutte* le tautologie (o *leggi logiche*) che sussistono nel linguaggio formale (si noti – *en passant* – che il numero delle tautologie è infinito, perché – per esempio – da ognuna di esse se ne può ottenere un'altra, poi un'altra ancora, poi un'altra ancora, eccetera, iterando ogni volta la regola *I*∨).

Abbiamo inoltre affermato che gli stessi teoremi del calcolo degli enunciati possono essere dimostrati seguendo approcci alternativi, i quali utilizzino per esempio altre regole di derivazione, oppure ne modifichino il numero, introducendo qualche assioma iniziale. Per esempio, nei *Principia Mathematica* (1910), Whitehead e Russell avevano proposto un sistema di calcolo costituito da quattro assiomi e da due regole di derivazione.

Assiomi:

- | | |
|----|--|
| A1 | $\vdash (p \vee p) \supset p$ |
| A2 | $\vdash q \supset (p \vee q)$ |
| A3 | $\vdash (p \vee q) \supset (q \vee p)$ |
| A4 | $\vdash (q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset (p \vee r))$ |

Regole:

- | | | |
|----|-------------------|--|
| R1 | sostituzione | se α è un termine categorematico presente in un certo teorema e si sostituisce ogni occorrenza di α con una qualunque formula ben formata (<i>fbf</i>), si ottiene ancora un teorema |
| R2 | separazione (MPP) | se α e $(\alpha \supset \beta)$ sono teoremi, allora anche β è un teorema |

Paradossi dell'implicazione

Nelle condizioni sopra ricordate, noi abbiamo dimostrato che sono *teoremi* del calcolo le seguenti *fbf*, “paradossi dell'implicazione”:

$$\vdash \sim p \supset (p \supset q) \qquad \vdash p \supset (q \supset p)$$

Qualora siano interpretati nel linguaggio ordinario, questi due teoremi conducono a espressioni alquanto contro-intuitive. Per esempio, il primo teorema potrebbe essere interpretato come: «non si dà il caso che Napoleone fosse cinese implica che, se Napoleone fosse stato cinese, allora la Luna sarebbe stata un carciofo». Malgrado il linguaggio ordinario preveda questi “modi di dire”, un aspetto paradossale del teorema risiede nel fatto che il secondo condizionale asserisce una *implicazione* tra due *fbf* che sono del tutto *irrelate* dal punto di vista concettuale, perché riguardano la prima una proprietà di Napoleone e la seconda una proprietà della Luna. Uno degli aspetti paradossali sta insomma nel fatto che – proprio a causa della definizione che i logici adottano per il connettivo “implicazione materiale” – una *fbf* falsa implica (non solo *fbf* che possono essere indifferentemente *vere* o *false*, ma anche) *fbf* le quali riguardano *fatti che non hanno nulla a che vedere* con l’antecedente dell’implicazione. Il secondo teorema potrebbe essere invece interpretato così: «si dà il caso che Napoleone fosse francese implica che se la Luna fosse un carciofo allora Napoleone sarebbe francese». In questo caso, l’aspetto paradossale del teorema risiede nel fatto che – sempre a causa della definizione che i logici accolgono per il connettivo implicazione – una *fbf* vera può essere sempre intesa come conseguente logico di *fbf* le quali (oltre a poter essere *false*) riguardano *fatti che non hanno nulla a che vedere* con il conseguente dell’implicazione.

Quando si passa al calcolo dei predicati, la situazione non muta. Infatti, introducendo i quantificatori (e le relative regole di introduzione e di eliminazione) abbiamo detto che è possibile dimostrare le seguenti *fbf* (“paradossi dell’implicazione formale”), le quali costituiscono il corrispettivo di quanto si può ottenere nel calcolo degli enunciati:

$$\vdash \forall x \sim Fx \supset \forall x (Fx \supset Gx)$$

$$\vdash \forall x Fx \supset \forall x (Gx \supset Fx).$$

In definitiva, i “paradossi dell’implicazione” scaturiscono dal fatto che nella logica ordinaria il connettivo “ $\supset$ ” non esprime alcun tipo di *inerenza concettuale* tra ciò che l’antecedente descrive e ciò che è descritto invece dal conseguente; l’implicazione materiale prescrive soltanto che – ove l’antecedente sia vero – il conseguente sia vero; ma, quando l’antecedente è falso, l’implicazione nulla prescrive circa il conseguente, né sotto il profilo strettamente logico né sotto quello concettuale. È dal tentativo di rendere più stringente il concetto di “implicazione” che ha tratto spunto – nel XX secolo – lo studio delle logiche modali.

Tipi di modalità

Si possono costruire varie tipi di logiche modali, in relazione ai connettivi utilizzati.

Modalità	Connettivi
aletiche	“è necessario che”; “è possibile che”
epistemiche	“è noto che”; “è opinabile che”
deontiche	“è obbligatorio che”; “è permesso che”
temporali	“si dà sempre che”; “si dà talvolta che”
etiche	“è bene che”; “è male che”

Le modalità delle quali ci occuperemo prima di tutto sono quelle di tipo “aletico”, le quali hanno a che fare con la “necessità” o con la “possibilità” che si dia qualche cosa.

Il concetto di “possibilità” era già stato discusso da Aristotele, negli *Analitici primi*: secondo Aristotele, il “possibile” è *ciò che non è necessariamente vero né necessariamente falso*. Secondo Teofrasto, allievo dello stesso Aristotele, il “possibile” dovrebbe invece essere inteso come *ciò che non è necessariamente falso*; in questo caso (in dissenso con la tesi di Aristotele), anche *ciò che è necessariamente vero* dovrebbe essere considerato come «possibile». La logica contemporanea ha accettato l’impostazione di Teofrasto.

Secondo la logica antica e medievale, il *modus* poteva essere inteso in vari accezioni. L'enunciato «ciò che è bianco potrebbe essere nero» è suscettibile infatti di due diverse interpretazioni:

1. la possibilità riguarda l'*enunciato* nel suo complesso, cioè il fatto che qualcosa possa avere nella stessa occasione una certa proprietà (essere bianco) e la proprietà opposta (essere nero); in questo caso, l'enunciato modale affermerebbe la possibilità che si dia una *contraddizione* e sarebbe dunque *falso*; modalità di questo genere, che riguardano gli enti del linguaggio (quali sono gli enunciati), venivano indicate anticamente come modalità *de dicto*;
2. la possibilità riguarda un *oggetto* che occorre nell'enunciato, cioè il fatto che qualcosa possa avere una certa proprietà (essere bianco) in una data occasione e una proprietà diversa (essere nero) in un'altra occasione; in questo caso, l'enunciato modale affermerebbe la possibilità che gli attributi di qualche ente possano cambiare e sarebbe dunque vero; modalità di questo genere, che riguardano gli enti del mondo (quali sono gli oggetti e le loro proprietà), venivano indicate anticamente come modalità *de re*.

In sintesi: una modalità *de dicto* (quale: «è necessario che Socrate sia razionale») caratterizza modalmente gli *enunciati*; una modalità *de re* (quale: «Socrate è necessariamente razionale») caratterizza modalmente le *proprietà delle cose*.

Ora, giacché la logica dovrebbe occuparsi esclusivamente delle caratteristiche formali del *linguaggio* (e non dovrebbe mai invadere il dominio dell'ontologia, cioè quello delle proprietà delle *cose*), interpretare gli enunciati modali come se essi esprimessero modalità *de re* dovrebbe essere in linea di massima evitato (perché queste modalità, come abbiamo detto, sembrano alludere al fatto che certe *caratteristiche del mondo* siano “necessarie”, oppure “possibili”). Tuttavia, le operazioni formali previste nel calcolo modale non consentono di mantenere queste distinzioni così sottili. Infatti, come ricorderemo alla fine di questa breve rassegna, nella logica modale dei predicati risulterebbe alquanto difficile scartare tutte quelle formule che sembrano alludere a un impegno di tipo ontologico (per il fatto che, in esse, l'operatore modale ricade sotto il campo di applicazione di un quantificatore, come nell'esempio delle modalità *sensu diviso*, che abbiamo presentato qui sopra). Sono di questo tipo, come abbiamo notato, tutte quelle formule che sono suscettibili della seguente interpretazione: esse affermano che certe caratteristiche degli oggetti di cui si sta parlando sono “necessarie”, oppure “possibili”, come se la logica avesse il potere di formalizzare i *modi* secondo i quali occorrono le proprietà dell'universo del quale si sta parlando.

Questi richiami alla cautela, nell'uso dei connettivi modali, potrebbe sembrare forse eccessivo: potrebbe sembrare il frutto di un puntiglio esagerato, circa l'oggetto e il campo di applicazione della logica pura.

C'è però un fatto ulteriore, che va qui segnalato: in alcuni dei sistemi di logica modale di cui parleremo, *dalla possibile esistenza di qualcosa che abbia una certa qual proprietà* si può inferire *l'esistenza di qualcosa che abbia possibilmente quella proprietà*. Per dirla in termini simbolici, in alcuni sistemi modali è lecito trarre formule di questo tipo: $\Diamond \exists x Fx \supset \exists x \Diamond Fx$. Non c'è chi non veda qualcosa di estremamente bizzarro, in teoremi del genere: emerge in qualche modo l'idea che la logica possa arrogarsi il diritto di stabilire *ciò che esiste*, una volta ammesso che sia possibile che esista qualcosa.

Come diremo, è sulla base di considerazioni di questo tipo che alcuni autori hanno guardato con un certo sospetto la logica modale e le sue eventuali applicazioni. Ma si deve anche ricordare che lo stesso Russell, in un saggio del 1914 (*Mysticism and Logic*) aveva avanzato serie perplessità, circa il fatto che la logica potesse ammettere nel suo seno concetti e simboli esprimenti possibilità: «Una proposizione è semplicemente vera o falsa, e qui termina la faccenda: non può sorgere questione di “circostanza”». In questo quadro, il concetto di “tautologia” già riassumeva per Russell quello di “verità necessaria”; il concetto di “proposizione contingentemente vera” riassumeva quello di “verità possibile”. Una posizione così rigida e negativa nei confronti dei concetti modali – qualora avesse prevalso – avrebbe però impedito definitivamente di esprimere nel linguaggio formale moltissimi enunciati correnti del linguaggio ordinario (come “è possibile che piova”) e anche molti enunciati di tipo scientifico (come quelli legati a considerazioni di tipo statistico o probabilistico).

Prima di procedere oltre, è bene chiarire che la “necessità” e la “possibilità” delle quali noi intendiamo parlare (ammesso che ci si riesca) sono esclusivamente quelle di tipo *logico* e non quelle di tipo *fisico*. Per chiarire la differenza, si può fare un esempio. Consideriamo i due enunciati:

- a) «è impossibile che un corpo viaggi a una velocità superiore a quella della luce»;
- b) «è impossibile che la luce viaggi a una velocità superiore a quella della luce».

Com'è abbastanza evidente, il primo enunciato si riferisce a un *principio d'ordine fisico*, il quale è alla base della teoria della relatività speciale, proposta da Einstein nel 1905. In generale (fatta salva l'eventualità che qualcuno non riesca invece a mostrare – con un approccio diverso – che il

principio in questione è in realtà il risultato di considerazioni più universali, d'ordine logico), il fatto che questa teoria abbia un carattere *empirico* (sia cioè suscettibile di conferma e di falsificazione) è una opinione consolidata, condivisa dalla comunità degli specialisti. Dunque, questo tipo di “necessità” (che non riguarda la mera forma delle espressioni) non può riguardare la logica. Al contrario, grazie alla sua stessa struttura formale, il secondo enunciato è legato al *principio logico* dell'identità, o a quello di non contraddizione; esso descrive qualcosa che non potrebbe mancare di essere vero, indipendentemente da come stanno le cose. In contenuto empirico dell'enunciato è nullo; in definitiva, esso esprime soltanto una tautologia. Questo tipo di “necessità” è ciò di cui dovrebbe propriamente occuparsi la logica, indipendentemente da quello che accade nel mondo attuale.

Implicazione stretta

Abbiamo precedentemente ricordato che l'*implicazione*, per come essa è stata concepita dalla logica contemporanea, esprime qualcosa di profondamente diverso rispetto all'idea di una *connessione concettuale*, ovvero di una *inerenza semantica*, ovvero di un *collegamento di significato tra i termini*, che sembra invece del tutto immediata e intuitiva quando – nel linguaggio ordinario – noi diciamo che qualcosa “implica” qualche altra cosa. In una “implicazione” tra asserti, si vorrebbe infatti che il “contenuto” del conseguente fosse “determinato” da quello dell'antecedente. All'inizio di queste riflessioni sulle modalità abbiamo invece ricordato che la definizione stessa del connettivo “ $\supset$ ” è all'origine di alcuni risultati “paradossali”, i quali mostrano in modo esplicito che enunciati falsi possono “implicare” enunciati veri (o viceversa), senza che l'antecedente dell'implicazione condivida alcun contenuto concettuale con il conseguente.

È proprio a partire da questo genere di considerazioni che prese le mosse intorno al 1912 C.I. Lewis, fondatore della logica modale contemporanea.

Nel tentativo di rafforzare il concetto logico di “implicazione” (rendendolo più vicino all'accezione ordinaria del termine), Lewis introdusse il concetto di “implicazione stretta” (o “implicitazione”) che (per esigenze d'ordine grafico) indicheremo d'ora in avanti col simbolo “ $\Rightarrow$ ”. Nelle intenzioni di Lewis, questo simbolo avrebbe dovuto segnalare al logico tutti i casi in cui l'implicazione tra due enunciati avesse il carattere della *necessità*; in termini formali, utilizzando il connettivo di necessità $\Box$, Lewis poneva: $\Box(p \supset q) \equiv p \Rightarrow q$. Un altro modo di interpretare lo stesso enunciato è il seguente: «è *impossibile* che si dia contemporaneamente p e $\sim q$ »; dunque, esprimendo la stessa frase mediante il connettivo di possibilità, avremo: $\sim\Diamond(p \wedge \sim q) \equiv p \Rightarrow q$.

Nelle concezioni di Lewis, affermare che l'implicazione tra due enunciati è *necessaria* significa affermare che il conseguente è *derivabile* dall'antecedente; dire che «q è *deducibile* da p» (quando p implichi q), significa dire che $p \supset q$ è una “verità necessaria”. In questo senso, affermare la “necessità” di una certa formula significherebbe affermare qualcosa circa il calcolo stesso (cioè: circa il fatto che qualcosa sia “deducibile” da qualche altra cosa); più che essere un segno *del* calcolo, il connettivo di necessità assume allora le vesti di un segno che esprime qualcosa *sul* calcolo; più che essere un termine della logica, la *necessità* prende le vesti di una proprietà meta-logica. La logica modale si caratterizzerebbe come una sorta di meta-logica.

La logica modale contemporanea non ha conservato il carattere che i fondatori cercavano di attribuirle. Tutti i connettivi sono termini del calcolo, soggetti a precise regole di formazione e di derivazione. Il connettivo di necessità (così come quello di possibilità) è un simbolo che consente di formare enunciati a partire da altri enunciati. Rispetto ai termini sincategorematici del calcolo degli enunciati (e di quello dei predicati) c'è però un aspetto che va sottolineato: i connettivi modali non sono vero-funzionali, perché (ad esempio) da fatto che p sia *vera* non segue che, in ogni caso, p sia *necessariamente vera*. In altri termini, dal valore di verità di p non è possibile inferire il valore di verità di $\Box p$ (mentre, se p è falsa, segue che p non è necessaria, cioè il fatto che $\Box p$ è falsa).

Tutto ciò suggerisce che il problema dell'interpretazione semantica degli enunciati modali sia alquanto complesso, cosa che non possiamo qui sviluppare in maniera adeguata. Basterà ricordare che – secondo un'impostazione ormai accettata, proposta da S. Kripke negli anni '60 del secolo scorso – si suole dire che una proposizione è *necessaria* se essa è *vera in ogni mondo possibile*, mentre una proposizione è *possibile* se essa è *vera in almeno un mondo possibile*. Qui, per “mondo possibile” si deve intendere una sorta di replica logica dell'universo del discorso, nella quale una o più caratteristiche risultano modificate, rispetto all'universo del discorso attuale. Resta il problema di stabilire quali

caratteristiche dell'universo del discorso possano essere effettivamente variate e quale sia l'effettivo significato filosofico di questi "mondi" così alterati. Ne parleremo più avanti.

Sistemi modali

Nel costruire il calcolo degli enunciati e quello dei predicati noi abbiamo seguito il metodo della *deduzione naturale*: per ognuno degli operatori introdotti (connettivi e quantificatori) abbiamo definito due regole di derivazione: la *eliminazione* e la *introduzione* dell'operatore. All'inizio di questi appunti sulle modalità, abbiamo però ricordato che è possibile raggiungere gli stessi risultati utilizzando altri metodi: si può ridurre il numero delle regole di derivazione, introducendo un certo numero di *assiomi*. Si tratta ora di vedere qual è il metodo più semplice e più conveniente, per costruire i sistemi modali.

Possiamo notare in primo luogo che, se un certo enunciato è *necessario*, è ragionevole assumere che quanto afferma quell'enunciato *si dia*. Inoltre, posto che *si dia* ciò che un enunciato sostiene, è ragionevole assumere che quell'enunciato sia – se non altro – *possibile*. In formule, in tutti i sistemi modali, noi dovremmo allora trovare:

$$\begin{array}{ll} \vdash \Box p \supset p & \text{è necessario che } p \text{ implica } p \\ \vdash p \supset \Diamond p & p \text{ implica che } p \text{ è possibile.} \end{array}$$

Analizzando la forma di queste due tesi, possiamo notare che nel primo caso il passaggio dall'antecedente al conseguente comporta l'*eliminazione* del connettivo di necessità, mentre nel secondo caso (per passare dall'antecedente al conseguente) abbiamo *introdotto* il connettivo di possibilità. Allora, le tesi suddette potrebbero essere introdotte come le due prime *regole* del nostro calcolo: la regola $E\Box$ e, rispettivamente, la regola $I\Diamond$.

Adottare il metodo della "deduzione naturale", anche nel caso del calcolo modale, è senz'altro possibile, ma è un po' laborioso. Infatti, mentre le regole $E\Box$ e $I\Diamond$ – che abbiamo qui sopra introdotto – sono semplici e del tutto intuitive, le altre due regole ($I\Box$ e $E\Diamond$) sono tutt'altro che semplici e sono anzi soggette a una serie alquanto complessa di condizioni. Per la costruzione del calcolo, conviene allora seguire il metodo dell'assiomatizzazione, cioè il metodo introdotto per il calcolo degli enunciati da Whitehead e Russell, al quale abbiamo qui sopra accennato.

Notiamo intanto in forma esplicita che – per il significato stesso che dei connettivi introdotti – in tutti i sistemi modali devono valere le seguenti relazioni:

$$\Box p \equiv \sim \Diamond \sim p; \quad \Diamond p \equiv \sim \Box \sim p; \quad p \Rightarrow q \equiv \Box(p \supset q) \equiv \sim \Diamond(p \wedge \sim q);$$

esse ci dicono come sono legati tra loro i connettivi modali e ci indicano che, per la costruzione del calcolo, basterebbe introdurne uno solo. L'introduzione di tre connettivi, in luogo di uno, ha il solo scopo di rendere più compatto il formalismo.

Assumendo inoltre che la nozione logica di *necessità* rispecchi in qualche modo le caratteristiche che sono proprie dell'analogica nozione intuitiva, ci aspettiamo che in ogni sistema modale valgano i seguenti criteri:

- ogni formula che esprime un teorema, oltre ad essere vera (tautologica) è anche necessaria;
- tutto ciò che segue necessariamente da ciò che è necessario è anch'esso necessario.

Concentriamo l'attenzione sul secondo di questi criteri. Esso dice in sostanza che:

la necessità di p , unita al fatto che p implica necessariamente q

comporta

la necessità di q .

Esprimendo tutto ciò nel formalismo modale, ci aspettiamo dunque che in ogni sistema valga la tesi:

$$\vdash (\Box p \wedge \Box(p \supset q)) \supset \Box q.$$

Si può però dimostrare che la formula suddetta equivale esattamente alla formula:

$$\vdash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q),$$

la quale può dunque essere assunta come uno degli assiomi caratteristici di tutti i sistemi modali.

Ciò posto, passiamo a descrivere i principali sistemi. Ne descriveremo qui di seguito tre, disposti secondo un ordine di *forza* crescente (un sistema modale A viene detto più “forte” di un sistema modale B se tutti i teoremi di B sono *anche* teoremi di A, ma alcuni teoremi di A *non sono* teoremi di B). Diamo ovviamente per scontato che per tutti e tre i sistemi modali siano stati preventivamente introdotti i simboli e le regole di formazione, in modo analogo a quanto accade nei sistemi non modali. Giacché abbiamo già presentato per via intuitiva i connettivi modali, possiamo limitarci ad aggiungere che elencare esplicitamente le regole di formazione non comporta alcun rilevante problema.

SISTEMA T

Il sistema modale più debole è il cosiddetto *sistema T*, il quale è caratterizzato da *sei assiomi* e da *tre regole*.

I primi quattro assiomi e le prime due regole sono identici a quelli introdotti da Whitehead e Russell nei *Principia Mathematica* (cioè quelli indicati con le sigle A1-A4 e R1-R2, nel paragrafo iniziale di questo capitolo). In breve, possiamo anche dire che il sistema T incorpora tutti i teoremi del calcolo degli enunciati, cioè tutte le formule tautologiche che possono essere costruite combinando gli enunciati mediante i connettivi.

Gli ulteriori due assiomi, rispetto a quelli dei *Principia Mathematica*, sono:

A5 $\vdash \Box p \supset p$

A6 $\vdash \Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q).$

L’ulteriore regola, rispetto a quella dei *Principia Mathematica*, è invece:

R3 necessitazione *se α è un teorema, anche $\Box\alpha$ è un teorema.*

Come abbiamo già notato nel precedente paragrafo, l’assioma A6 esprime l’idea secondo la quale *tutto ciò che segue necessariamente da ciò che è necessario è anch’esso necessario*. Invece, la regola R3 esprime l’idea secondo la quale *ogni formula che esprime un teorema, oltre al fatto di essere vera (tautologica) è anche necessaria*. Si tratta, come abbiamo già detto, di due requisiti che sembrano del tutto naturali, se si vuol dare una espressione formale alla nozione intuitiva di necessità.

La formula $p \supset \Box p$ (la quale esprime il principio intuitivo secondo il quale, se qualcosa si dà, allora quello stesso qualcosa è anche possibile) non costituisce un assioma del sistema T, ma può essere derivato come un *teorema*.

La formula $p \supset \Box p$ non è dimostrabile nel sistema T e in nessun altro sistema modale. Anzi, qualora essa venga assunta come assioma, il sistema T “collasserebbe” nel calcolo degli enunciati; infatti, da $p \supset \Box p$ e dall’assioma A5 si avrebbe subito che $\Box p \equiv p$, cosa che priverebbe d’ogni ruolo effettivo tutti gli operatori modali. Insieme a T, “collasserebbero” anche gli altri sistemi.

SISTEMI S4, S5

Un sistema modale più forte di T è il cosiddetto *sistema S4*, che può essere costruito a partire dallo stesso sistema T, aggiungendo l'assioma:

$$\mathbf{A7} \quad \vdash \Box p \supset \Box \Box p.$$

Il significato dell'assioma A7 è alquanto controverso (e, per alcuni versi, anche oscuro). Esso afferma in sostanza che, *se una proposizione è necessaria, allora anche la proposizione che esprime questa necessità è a sua volta una verità necessaria*. Resta il dubbio seguente: cosa intendiamo dire, esattamente, quando affermiamo che una certa formula è “necessariamente necessaria”? Cosa vogliamo mai dire, esattamente, quando *iteriamo una modalità*, asserendo la “necessità d'una necessità”? E perché non potremmo allora costruire sistemi modali sempre più “forti”, ammettendo la “necessità della necessità della necessità della necessità”? Quale senso potrebbe avere questa iterazione?

Considerazioni analoghe si possono svolgere per il *sistema S5*. Esso assorbe tutto il contenuto formale del sistema S4, aggiungendo a quest'ultimo l'assioma:

$$\mathbf{A8} \quad \vdash \Diamond p \supset \Box \Diamond p.$$

L'assioma A8 afferma in sostanza che, *se una proposizione è vera in qualche mondo possibile, allora è necessario che essa sia vera in qualche mondo possibile*.

In estrema sintesi, gli enunciati A7 e A8 affermano che, *se una proposizione possiede una certa caratteristica modale, allora essa la possiede necessariamente*.

Modalità ed esistenza

Come abbiamo accennato in un precedente paragrafo, uno dei motivi che avevano spinto Lewis a sviluppare il calcolo modale era l'esistenza dei “paradossi dell'implicazione”: formule contro-intuitive, che allontanano la nozione logica di “implicazione” da quella ordinaria, in uso nel linguaggio comune. Per comodità, riproduciamo qui di seguito i “paradossi” in questione.

Nel calcolo degli enunciati abbiamo:

$$\vdash \sim p \supset (p \supset q)$$

$$\vdash p \supset (q \supset p).$$

Nel calcolo modale senza quantificazione si possono dimostrare invece i seguenti teoremi:

$$\vdash \sim \Diamond p \supset \Box (p \supset q)$$

$$\vdash \Box p \supset \Box (q \supset p).$$

Come ognuno vede, la speranza di eliminare i paradossi attraverso l'introduzione degli operatori modali è destituita di fondamento; infatti, *da una proposizione impossibile (necessariamente falsa) è possibile concludere che essa implica necessariamente qualunque proposizione*; d'altra parte, *una proposizione necessariamente vera è implicata necessariamente da qualunque altra proposizione*.

Abbiamo anche accennato al fatto che è possibile innestare gli operatori modali entro il calcolo dei predicati, per ottenere un *calcolo modale quantificato*. Gli ingredienti di questo calcolo sono già presenti nei precedenti paragrafi. Per esempio, gli assiomi modali di un *sistema T* con *quantificazione* saranno:

$$\mathbf{A5} \quad \vdash \Box \alpha \supset \alpha$$

$$\mathbf{A6} \quad \vdash \Box (\alpha \supset \beta) \supset (\Box \alpha \supset \Box \beta),$$

con la sola avvertenza che α e β possono essere in questo caso intere formule del calcolo dei predicati (oltre che meri enunciati).

Come abbiamo in precedenza notato, l'unica vera difficoltà del calcolo modale quantificato sta nella sua interpretazione: in particolare, la difficoltà nasce dal fatto che – in tutti quei sistemi modali in cui *l'esistenza di una necessità* può essere trasformata nella *necessità d'una esistenza* – il significato del formalismo sembra invadere il campo dell'ontologia.

Per rendere il discorso un po' meno generico, segnaliamo che nel sistema S5 con quantificazione è possibile dimostrare la cosiddetta *formula di Barcan*, la quale può essere espressa in vari modi; per esempio:

- a) $\vdash \forall x \Box Fx \supset \Box \forall x Fx$,
- b) $\vdash \Diamond \exists x Fx \supset \exists x \Diamond Fx$.

Formule di questo tipo non sono ottenibili nei sistemi T e S4, ma sono dimostrabili nel sistema S5. Le obiezioni più ovvie da rivolgere alle formule in questione possono essere espresse così:

- a) dal fatto che *tutto ciò che esiste abbia necessariamente* una certa proprietà non segue (dal punto di vista intuitivo) che *sia necessario* che tutto ciò che esiste abbia proprio quella proprietà;
- b) dal fatto che *sia possibile l'esistenza* di qualcosa che abbia una certa proprietà, non segue (dal punto di vista intuitivo) che *esista* qualcosa che possa godere di quella proprietà.

Obiezioni di questo genere si basano sull'idea che nei "mondi possibili" potrebbero anche esserci enti (indicati con la variabile x) i quali:

- i) *non esistono* nel mondo attuale,

oppure:

- ii) *hanno proprietà diverse* da quelle che gli stessi enti hanno nel mondo attuale.

Però, se si adotta qualche regola semantica atta ad imporre che:

- i) *la classe* degli enti considerati *sia la stessa*, in ogni "mondo possibile",

e che:

- ii) *ogni ente considerato abbia*, nei diversi mondi possibili, *le stesse proprietà* che quello stesso ente possiede nel mondo attuale,

allora le obiezioni che abbiamo espresso nei confronti delle formule a) e b) non tengono più.

Molti litri d'inchiostro sono stati consumati dai filosofi della logica contemporanea, per fissare qualche *condizione d'identificazione* dei vari enti, nei diversi mondi possibili. Le soluzioni proposte non sono unanimemente condivise. Ciò conforta l'impressione che abbiamo espresso all'inizio di queste riflessioni, circa il fatto che l'aspetto semantico delle modalità è – ancora oggi – tutt'altro che chiaro.

Come abbiamo notato, i problemi principali che si incontrano nell'interpretazione delle modalità ruotano per certi aspetti intorno al rapporto tra la logica e l'ontologia. Valga allora, a conclusione di queste note, quanto ebbe ad affermare alcuni anni fa B. Van Fraassen: «Per quanto plausibile appaia la cosa all'inizio, la strada dorata che le ontologie dei mondi possibili promettono alla filosofia non porta in alcun luogo»

VI. LA LOGICA DEL TEMPO

SOMMARIO

<i>Rappresentare le successioni di fatti</i>	<i>33</i>
<i>La tense logic: il sistema minimale.....</i>	<i>34</i>
<i>Le relazioni temporali: sincronicità e successione.....</i>	<i>35</i>

Rappresentare le successioni di fatti

Riferendoci al tempo, noi usiamo spesso la metafora del “flusso”. Riflettendo con più attenzione sulle rappresentazioni dei fatti, due forme specifiche vengono però in risalto. Da una parte, la rappresentazione dei fatti può essere esposta al presente, come fosse un racconto, una cronaca, una narrazione sincronizzata esattamente sui fatti; in questo caso, lo svolgersi temporale della narrazione segue esattamente lo svolgimento temporale dei fatti. D'altra parte, la rappresentazione può limitarsi ad enunciare le relazioni temporali tra i fatti, mettendoli in ordine, secondo la successione del prima, del simultaneo e del poi, senza alcun accenno al presente.

Giusto un secolo fa, nel 1908, il filosofo inglese John Ellis McTaggart aveva introdotto l'idea che non solo le rappresentazioni dei processi o delle successioni di eventi, ma le stesse «posizioni nel tempo, per come il tempo ci appare prima facie» possono essere rappresentate in due modi distinti: secondo l'ordine del prima, del simultaneo e del poi (laddove nessuna posizione nel tempo occupa in questo caso quel posto particolare che corrisponde al presente) e secondo gli attributi di passato, presente e futuro (che noi assegniamo alle posizioni nel tempo, quando vogliamo caratterizzarle, appunto, rispetto al tempo presente). Queste due diverse modalità di rappresentare le “posizioni nel tempo” emergono in modo chiaro nel linguaggio ordinario, quando affermiamo per esempio: «l'assassinio di Kennedy precede di sei anni lo sbarco sulla Luna», oppure: «l'attacco al World Trade Center è avvenuto sette anni fa».

Tradizionalmente, seguendo la terminologia introdotta da McTaggart, alle successioni temporali che riconoscono il “presente” – distinguendolo dal “passato” e dal “futuro” – ci si riferisce come alle A-serie; a quelle che non lo contemplano (e che prevedono soltanto l'ordine temporale del “prima”, del “simultaneo” e del “dopo”) ci si riferisce come alle B-serie.

Per il fatto che i termini della A-serie rendono variabile il valore di verità associato agli enunciati che li utilizzano (visto che ogni evento presente è stato futuro e sarà passato), questa serie sembra idonea a dar conto del mutamento, della dinamicità dei processi, del divenire temporale: ogni “presente” era “futuro” e diventerà “passato”; ogni evento è fugacemente “presente”, dopo essere stato “futuro” e prima di appartenere al “passato”. Rappresentazioni di questo tipo rinviano all'idea d'un tempo dinamico. Per contro, visto che i termini della B-serie rendono stabile il valore di verità associato agli enunciati che li utilizzano, questa serie non sembra idonea a descrivere il mutamento, ma piuttosto la mera relazione tra le posizioni nel tempo, tutt'al più la durata, il carattere statico e invariante della precedenza e della successione temporale.

Sotto il profilo logico, l'esistenza di due modalità di rappresentazione delle serie temporali pone diversi problemi. Ci occuperemo qui di seguito di due soli aspetti: quali siano gli strumenti formali più idonei ad esprimere il contenuto concettuale delle due serie; quali relazioni sia possibile istituire tra i due formalismi, e quali risorse aggiuntive, sotto il profilo formale, siano richieste.

La tense logic: il sistema minimale

Consideriamo le seguenti inferenze:

«fa caldo» $\vdash$ «si darà il caso che abbia fatto caldo»

«si è dato sempre il caso che oggi si desse una eclissi» $\vdash$ «oggi si dà una eclissi».

Le inferenze sembrano valide, indipendentemente dal contenuto che esprimono, in virtù delle regole di coniugazione dei tempi che vigono nella lingua italiana. Si pone quindi il problema di formalizzare le espressioni del linguaggio ordinario che contengono riferimenti temporali, introducendo opportuni operatori. Dobbiamo ad A. Prior, a partire dal 1956, la costruzione dei primi sistemi di logica del tempo.

Oltre agli usuali connettivi vero-funzionali, introduciamo quattro nuovi operatori modali:

passato debole	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}p$	si è dato talvolta il caso che p
futuro debole	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}p$	si darà talvolta il caso che p
passato forte	$\mathcal{H}$	$\mathcal{H}p$	si è dato sempre il caso che p
futuro forte	$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}p$	si darà sempre il caso che p

Come accade per i connettivi di necessità e di possibilità, anche gli operatori temporali sono termini impropri, che non sono-verofunzionali: così come dalla verità di p (per esempio: «piove») non segue la verità di $\Box p$ («è necessario che piova»), così dalla verità di q (per esempio: «sono le 12:30 del 25 maggio 2010», espressa alle 12:30 del 25 maggio 2010) non segue, contestualmente, la verità di $\mathcal{F}p$ («si darà talvolta nel futuro che siano le 12:30 del 25 maggio 2010», espressa anch'essa alle 12:30 del 25 maggio 2010).

Gli operatori temporali forti possono essere espressi mediante quelli deboli, e viceversa:

$$\mathcal{P}p \equiv \sim \mathcal{H}\sim p$$

$$\mathcal{F}p \equiv \sim \mathcal{G}\sim p$$

Valgono inoltre le seguenti formule, alcune delle quali possono essere assunte come assiomi di un sistema formale:

$\mathcal{G}q \supset \mathcal{F}q$	ciò che si darà sempre si darà talvolta
$\mathcal{G}(p \supset q) \supset (\mathcal{G}p \supset \mathcal{G}q)$	il futuro darsi sempre di $(p \supset q)$ implica che il futuro darsi sempre di p implichi il futuro darsi sempre di q
$\mathcal{F}q \supset \mathcal{F}\mathcal{F}q$	il darsi talvolta di q implica che si darà talvolta che si darà talvolta q
$\sim \mathcal{F}p \supset \mathcal{F}\sim \mathcal{F}p$	il non darsi talvolta di p implica che si darà talvolta che non si darà talvolta p

Il sistema $\mathbf{K}_t$ (*Minimal Tense Logic*) può essere generato per esempio dai seguenti quattro assiomi:

$p \supset \mathcal{H}\mathcal{F}q$	il darsi di p implica che si è dato sempre che p si sarebbe dato talvolta
$p \supset \mathcal{G}\mathcal{P}p$	il darsi di p implica che si darà sempre che p si sia dato talvolta
$\mathcal{H}(p \supset q) \supset (\mathcal{H}p \supset \mathcal{H}q)$	il passato darsi sempre di $(p \supset q)$ implica che il passato darsi sempre di p implichi il passato darsi sempre di q
$\mathcal{G}(p \supset q) \supset (\mathcal{G}p \supset \mathcal{G}q)$	il futuro darsi sempre di $(p \supset q)$ implica che il futuro darsi sempre di p implichi il futuro darsi sempre di q

e (oltre che dalle usuali regole del calcolo proposizionale) dalle due regole di inferenza:

- Reg $\mathcal{H}$: da una dimostrazione di p , segue una dimostrazione di $\mathcal{H}p$
- Reg $\mathcal{G}$: da una dimostrazione di p , segue una dimostrazione di $\mathcal{G}p$

Le due regole possono essere interpretate come *generalizzazioni temporali*: se una certa proposizione è dimostrabile (è un teorema del calcolo proposizionale), lo è anche nel passato e nel futuro (in senso forte)

Oltre che come estensione del calcolo proposizionale, la logica del tempo può essere costruita come estensione del calcolo dei predicati. In questo caso, emergono problemi di interpretazione, analoghi a quelli a cui si è accennato per il calcolo modale. Si consideri per esempio l'espressione: «un barbone sarà re»; sono possibili le seguenti interpretazioni:

$\exists x (Bx \wedge \mathcal{F} Rx)$	c'è (ora) un barbone che sarà re
$\exists x \mathcal{F} (Bx \wedge Rx)$	c'è (ora) qualcuno che sarà un re barbone
$\mathcal{F} \exists x (Bx \wedge \mathcal{F} Rx)$	ci sarà (rispetto a ora) qualcuno che sarà barbone e poi re
$\mathcal{F} \exists x (Bx \wedge Rx)$	ci sarà (rispetto a ora) qualcuno che sarà un re barbone

Come si può notare (dalle specificazioni temporali, esplicitate a parentesi nella colonna di destra), espressioni di questo genere (soprattutto le ultime due) richiedono che venga precisato l'istante (o l'intervallo) al quale si applica la quantificazione. Tuttavia, giacché è possibile costruire formule del tipo:

$$\mathcal{F} \exists x Sx \supset \exists x \mathcal{F} Sx,$$

le quali legano l'esistenza futura (a destra) all'esistenza attuale (a sinistra), in alcuni casi è necessario supporre che il dominio della quantificazione sia costante entro un certo intervallo di tempo (nella formula, l'esistenza di un x che gode della proprietà S è asserita a sinistra in un istante futuro, mentre a destra è asserita l'esistenza attuale di un x che godrà nel futuro della proprietà S).

Le relazioni temporali: sincronicità e successione

Il sistema minimale $\mathbf{K}_t$, il quale utilizza operatori che fanno riferimento al passato e al futuro (rispetto al momento dell'enunciazione), si presta a formalizzare quello che, nei termini di McTaggart, possiamo chiamare *A-linguaggio* (il linguaggio che meglio rappresenta il *divenire* temporale: si veda al primo paragrafo di questo capitolo): il fatto che gli operatori $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ non siano vero-funzionali esprime proprio il carattere dinamico della verità di espressioni quali $\mathcal{F}p$: dal darsi di p , dal fatto che – nel passato – p fosse stato un evento futuro, non segue nel futuro si darà talvolta il caso che p .

Il riferimento al “presente”, nel sistema $\mathbf{K}_t$, è implicito; per il “presente” non esiste alcun operatore temporale specifico; il “presente” si riferisce al *momento dell'enunciazione* (rispetto al quale assumono significato gli operatori temporali che proiettano un certo evento q verso il passato o verso il futuro), oppure – per dirla in altro modo – all'istante in cui si dà l'evento q , sul quale gli operatori temporali operano: asserire « q » significa asserire che q si dà (adesso); asserire « $\mathcal{F}q$ » significa asserire che q si darà talvolta nel futuro (rispetto al momento dell'asserzione).

Allo scopo di formalizzare quello che, nei termini di McTaggart, possiamo chiamare *B-linguaggio* (il linguaggio che meglio rappresenta l'*ordinamento* temporale: si veda al primo paragrafo di questo capitolo), introduciamo un nome variabile t (che denoterà istanti di tempo) e i due operatori diadici $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, definiti dalle seguenti forme predicative:

$\mathcal{R}tp$: p si dà al tempo t (cioè: al tempo generico t si dà il caso che p)

$\mathcal{U}tt'$: t si dà prima di t' (cioè: il tempo generico t' è successivo al tempo generico t)

Utilizzando gli operatori temporali deboli $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, varranno allora le seguenti equivalenze:

$$\mathcal{R}t \mathcal{F}p \equiv \exists t' (\mathcal{U}tt' \wedge \mathcal{R}t'p) \quad p \text{ è futuro rispetto a } t$$

$$\mathcal{R}t \mathcal{P}p \equiv \exists t' (\mathcal{U}t't \wedge \mathcal{R}t'p) \quad p \text{ è passato rispetto a } t$$

Per esprimere il fatto che l'evento p è simultaneo all'evento q (e che entrambi si danno all'istante t_0), basterà allora scrivere:

$$\mathcal{R}t_0p \wedge \mathcal{R}t_0q;$$

per esprimere il fatto che l'evento p precede l'evento q dovremo invece scrivere:

$$\mathcal{R}t_p p \wedge \mathcal{R}t_q q \wedge \mathcal{U}t_p t_q,$$

sempre che t_p e t_q denotino gli istanti in cui p e q si danno rispettivamente.

Ovviamente, in un linguaggio che adotti soltanto gli operatori diadici $\mathcal{R}$ e $\mathcal{U}$ (e non ammetta quelli del sistema minimale $\mathbf{K}_t$), non ci sarebbe alcun riferimento al presente. Se si introduce tuttavia una nuova costante “now”, convenendo che essa denoti il momento presente (quale che sia il significato ontologico di questo ente), la possibilità di tradurre le espressioni del B-linguaggio in quelle dell'A-linguaggio (e viceversa) sarebbe garantita dalle seguenti equivalenze:

$$p \equiv \exists t (\mathcal{R}tp \wedge (t = \text{now}))$$

$$\mathcal{P}p \equiv \exists t (\mathcal{R}tp \wedge \mathcal{U}tt' (t' = \text{now}))$$

$$\mathcal{F}p \equiv \exists t (\mathcal{R}tp \wedge \mathcal{U}t't (t' = \text{now})).$$

(sempre ammesso che il termine improprio “=” stia a indicare che il nome scritto alla sua sinistra e quello scritto alla sua destra siano equi-estensivi, cioè denotino lo stesso ente).